Exercice 1 (Pondichery, 7 avril 2014)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Deux sociétés, Ultra-eau (U) et Vital-eau (V), se partagent le marché des fontaines d'eau à bonbonnes dans les entreprises d'une grande ville.

Partie A

En 2013, l'entreprise U avait 45 % du marché et l'entreprise V le reste. Chaque année, l'entreprise U conserve 90 % de ses clients, les autres choisissent l'entreprise V. Quant à l'entreprise V, elle conserve 85 % de ses clients, les autres choisissent l'entreprise U.

On choisit un client au hasard tous les ans et on note pour tout entier naturel n :

u_n la probabilité qu'il soit un client de l'entreprise U l'année $2013 + n$, ainsi $u_0 = 0{,}45$;

v_n la probabilité qu'il soit un client de l'entreprise V l'année $2013 + n$.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets U et V.
2. Donner v_0, calculer u_1 et v_1.
3. On considère l'algorithme (incomplet) donné ci-dessous. Celui-ci doit donner en sortie les valeurs de u_n et v_n pour un entier naturel n saisi en entrée.

Variables :	N est un nombre entier naturel non nul	L1
	U et V sont des nombres réels	L2
Traitement :	Saisir une valeur pour N	L3
	Affecter à U la valeur 0,45	L4
	Affecter à V la valeur	L5
	Pour i allant de 1 jusqu'à N	L6
	Affecter à U la valeur $0{,}9 \times U + 0{,}15 \times V$	L7
	Affecter à V la valeur	L8
	Fin Pour	L9
Sortie :	Afficher U et Afficher V	L10

Compléter les lignes (L5) et (L8) de l'algorithme pour obtenir le résultat attendu.

4. On admet que, pour tout nombre entier naturel $n, u_{n+1} = 0,75u_n + 0{,}15$. On note, pour tout nombre entier naturel $n, w_n = u_n - 0{,}6$.
   (a) Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison 0,75.
   (b) Quelle est la limite de la suite (w_n) ? En déduire la limite de la suite (u_n).
   Interpréter le résultat dans le contexte de cet exercice.

Partie B

L'entreprise U fournit ses clients en recharges pour les fontaines à eau et dispose des résultats antérieurs suivants :

Nombre de recharges en milliers	1	3	5
Coût total annuel de production en centaines d'euros	11	27,4	83

Le coût total de production est modélisé par une fonction C définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,10]$ par : $C(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 10$ où a, b et c sont des nombres réels.

Lorsque le nombre x désigne le nombre de milliers de recharges produites, $C(x)$ est le coût total de production en centaines d'euros. On admet que le triplet (a, b, c) est solution du système (S).

$$(S) \quad \left\{\begin{array}{lcl} a + b + c & = & 1 \\ 27a + 9b + 3c & = & 17{,}4 \\ 125a + 25b + 5c & = & 73 \end{array}\right. \quad \text{et on pose } X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

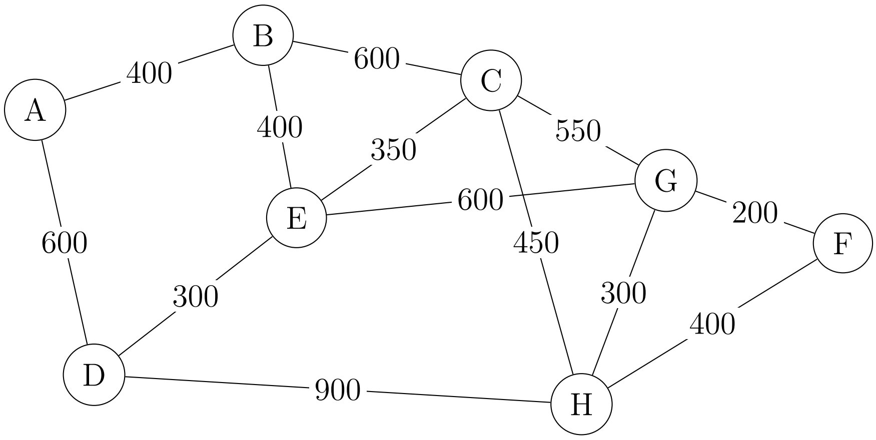
1. (a) Écrire ce système sous la forme $MX = Y$ où M et Y sont des matrices que l'on précisera.

(b) On admet que la matrice M est inversible. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le triplet (a, b, c) solution du système (S).

2. En utilisant cette modélisation, quel serait le coût total annuel de production pour 8 000 recharges d'eau produites ?

Exercice 2 (Amérique du Nord, 30 mai 2014)

Lors d'une campagne électorale, un homme politique doit effectuer une tournée dans les villes A, B, C, D, E, F, G et H, en utilisant le réseau autoroutier. Le graphe $\mathcal{G}$ ci-dessous, représente les différentes villes de la tournée et les tronçons d'autoroute reliant ces villes (une ville est représentée par un sommet, un tronçon d'autoroute par une arête). Les poids sont des distances (utilisées seulement à la partie B) :



Partie A

1. Déterminer, en justifiant, si le graphe $\mathcal{G}$ est :
   (a) complet ;
   (b) connexe.
2. (a) Justifier qu'il est possible d'organiser la tournée en passant au moins une fois par chaque ville, tout en empruntant une fois et une seule chaque tronçon d'autoroute.
   (b) Citer un trajet de ce type.
3. On appelle M la matrice d'adjacence associée au graphe $\mathcal{G}$ (les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique).
   (a) Déterminer la matrice M.
   (b) On donne la matrice

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & 5 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 7 & 2 & 8 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 6 & 4 & 9 & 3 & 9 & 10 \\ 5 & 2 & 4 & 0 & 9 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 8 & 9 & 9 & 4 & 4 & 10 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 4 & 2 & 6 & 6 \\ 4 & 3 & 9 & 3 & 10 & 6 & 6 & 9 \\ 1 & 5 & 10 & 8 & 4 & 6 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

   Déterminer, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 reliant E à H.
   Préciser ces chemins.

Partie B

Des contraintes d'organisation obligent cet homme politique à se rendre dans la ville F après la ville A.

Déterminer le trajet autoroutier le plus court pour aller de A à F et préciser la longueur de ce trajet.