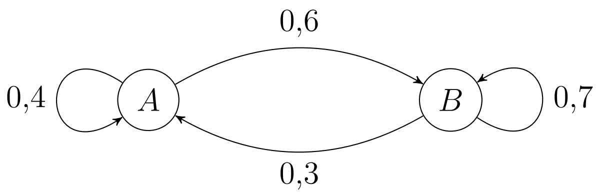
Exercices de type bac

∽

Exercice 1
Pour chacune des cinq affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

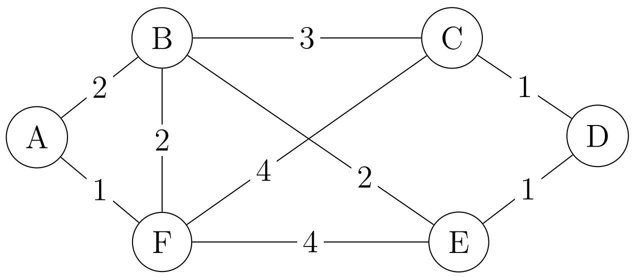
Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes

1. On donne le graphe probabiliste suivant :



Affirmation A : L'état stable associé à ce graphe est $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

2. On donne le graphe pondéré G suivant :



Affirmation B : Il existe une chaîne passant une et une seule fois par toutes les arêtes de ce graphe.

Affirmation C : La plus courte chaîne entre les sommets A et D est une chaîne de poids 5.

3. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On suppose que M est la matrice d'adjacence d'un graphe à quatre sommets A, B, C, D dans cet ordre.

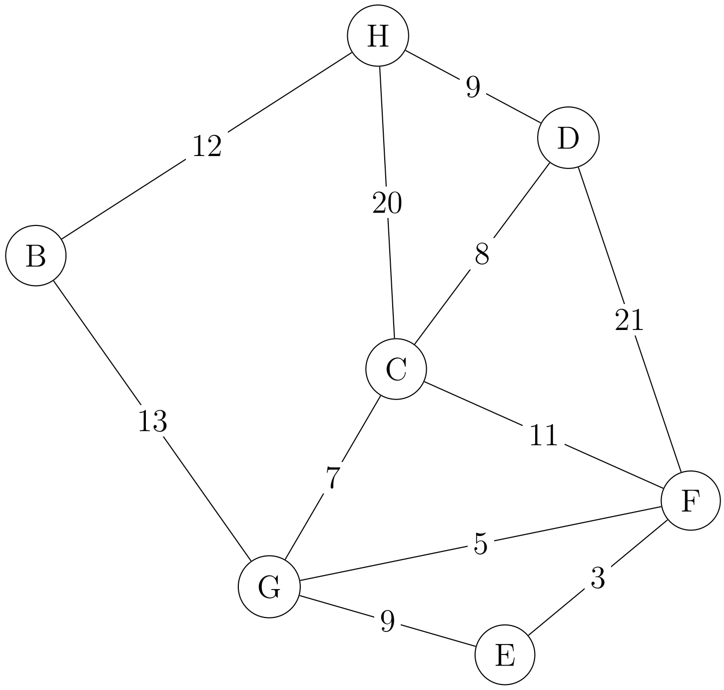
Affirmation D : Il existe exactement 3 chaînes de longueur 4 reliant le sommet B au sommet D.

4. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Affirmation E : Il existe un nombre réel a pour lequel B est l'inverse de A.

Exercice 2
Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A
Des touristes sont logés dans un hôtel H.
Un guide souhaite faire visiter la région à ces touristes en empruntant les routes signalées comme d'intérêt touristique par l'office du tourisme.
Les tronçons de route qu'il souhaite emprunter sont représentés sur le graphe ci-dessous.
Le long de chaque arête figure la distance en kilomètres des différents tronçons.



1. (a) Le guide peut-il emprunter tous les tronçons de route en passant une et une seule fois sur chacun d'eux, en partant de l'hôtel et en y revenant ? Justifier la réponse.
   (b) Le guide peut-il emprunter tous les tronçons de route en passant une et une seule fois sur chacun d'eux, en partant de l'hôtel mais sans forcément y revenir ? Justifier la réponse.
2. Un musée est situé en E. Déterminer le plus court chemin menant de l'hôtel H au musée E. Justifier la réponse.

Partie B
L'office de tourisme évalue chaque année les hôtels de sa région et répertorie les meilleurs sur son site internet. On admet que dans cette région, la création ou la disparition d'hôtels est négligeable.
On constate que, chaque année :
- 10% des hôtels répertoriés ne seront plus répertoriés l'année suivante ;
- 20% des hôtels non répertoriés sur le site seront répertoriés l'année suivante.

1. Réaliser un graphe décrivant cette situation
   (on notera R l'évènement « l'hôtel est répertorié » et $\overline{R}$ son évènement contraire).
2. Écrire la matrice de transition de ce graphe.
3. En 2015, 30% des hôtels de la région étaient répertoriés.
   Quel pourcentage d'hôtels sera répertorié en 2016 ? en 2017 ?
4. Quel pourcentage d'hôtel serait répertorié à long terme ?

Exercice 3 (Amérique du nord, 2 juin 2017)

Une grande université, en pleine croissance d'effectifs, accueillait 27 500 étudiants en septembre 2016. Le président de l'université est inquiet car il sait que, malgré une gestion optimale des locaux et une répartition des étudiants sur les divers sites de son université, il ne pourra pas accueillir plus de 33 000 étudiants.

Une étude statistique lui permet d'élaborer un modèle de prévisions selon lequel, chaque année :

- 150 étudiants démissionnent en cours d'année universitaire (entre le 1er septembre et le 30 juin) ;
- les effectifs constatés à la rentrée de septembre connaissent une augmentation de 4 % par rapport à ceux du mois de juin qui précède.

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'étudiants estimé selon ce modèle à la rentrée de septembre $2016 + n$, on a donc $u_0 = 27\,500$.

1. (a) Estimer le nombre d'étudiants en juin 2017.

   (b) Estimer le nombre d'étudiants à la rentrée de septembre 2017.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = 1{,}04u_n - 156$.

3. Recopier et compléter les lignes L5, L6, L7 et L9 de l'algorithme suivant afin qu'il donne l'année à partir de laquelle le nombre d'étudiants à accueillir dépassera la capacité maximale de l'établissement.

L1	Variables :	n est un nombre entier naturel
L2		U est un nombre réel
L3	Traitement :	n prend la valeur 0
L4		U prend la valeur 27 500
L5		Tant que $U \leqslant$ ...... faire
L6		$\quad$ n prend la valeur ....
L7		$\quad$ U prend la valeur ....
L8		Fin Tant que
L9	Sortie :	Afficher ....

4. (a) On fait fonctionner cet algorithme pas à pas.

   Recopier le tableau suivant et le compléter en ajoutant le nombre nécessaire de colonnes ; on arrondira les valeurs de U à l'unité.

	Initialisation	Étape 1	...
Valeur de n	0	...	
Valeur de U	27 500	...	

   (b) Donner la valeur affichée en sortie de cet algorithme.

5. On cherche à calculer explicitement le terme général u_n en fonction de n.

   Pour cela, on note (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 3\,900$.

   (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $\quad u_n = 23\,600 \times 1{,}04^n + 3\,900$.

   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n) et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

Exercice 4 (Polynésie, 4 septembre 2017)

On considère la suite géométrique (u_n), de raison 0,9 et de premier terme $u_0 = 50$.

1. (a) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il calcule et affiche le 25e terme de cette suite, c'est-à-dire u_{24} :

Variables :	N est un entier naturel
	U est un nombre réel
Initialisation :	U prend la valeur ...
Traitement :	Pour N allant de 1 à 24
	U prend la valeur ...
	Fin Pour
Sortie :	Afficher U

(b) Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.

(c) Calculer u_{24} et donner une valeur approchée du résultat à 10^{-3} près.

2. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n < 0{,}01$.
3. On souhaite calculer la somme $S_{24} = u_0 + u_1 + \cdots + u_{24}$.

   Voici trois propositions d'algorithmes :

Algorithme 1	Algorithme 2	Algorithme 3
Variables :	**Variables :**	**Variables :**
N est un entier naturel	N est un entier naturel	N est un entier naturel
S est un nombre réel	S est un nombre réel	S est un nombre réel
Initialisation :	**Initialisation :**	**Initialisation :**
S prend la valeur 0	S prend la valeur 0	S prend la valeur 50
Traitement :	**Traitement :**	**Traitement :**
Pour N allant de 0 à 24	Pour N allant de 0 à 24	Pour N allant de 0 à 24
S prend la valeur	S prend la valeur	S prend la valeur
$S + 50 \times 0,9^N$	$50 \times 0,9^N$	$S + 50 \times 0,9^N$
Fin Pour	Fin Pour	Fin Pour
Sortie :	**Sortie :**	**Sortie :**
Afficher S	Afficher S	Afficher S

(a) Un seul de ces algorithmes permet de calculer la somme S_{24} et de l'afficher.
Préciser lequel en justifiant la réponse.

(b) Calculer la somme S_{24}.
On donnera une valeur approchée du résultat à l'unité près.

4. Pour tout entier naturel n, on note $S_n = u_0 + \cdots + u_n$.

   On admet que la suite (S_n) est croissante et que pour tout entier naturel n,
   $S_n = 500 - 450 \times 0{,}9^n$.

(a) Déterminer la limite de la suite (S_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

(b) Alex affirme que S_n peut dépasser 500 pour une valeur de l'entier n suffisamment grande.
Que pensez-vous de son affirmation ? Justifier la réponse.

Exercice 5 (Nouvelle-Calédonie Wallis-et-Futuna, 28 novembre 2017)

Début 2013, la superficie totale des forêts sur la terre représente un peu plus de 4 milliards d'hectares.
Au cours de l'année 2013, on estime qu'environ 15 millions d'hectares ont été détruits.
Des plantations d'arbres et une expansion naturelle des forêts ont ajouté 10,2 millions d'hectares de nouvelles forêts en 2013.

1. Montrer que la superficie totale des forêts détruites au cours de l'année 2013 représente 0,375 % de la superficie totale des forêts mesurée au début de l'année.

   On admet dans la suite que chaque année, la proportion des surfaces détruites de forêts et la superficie de nouvelles forêts restent constantes.

   On note u_n la superficie (en millions d'hectares) occupée par les forêts sur la Terre au début de l'année $(2013 + n)$ avec $u_0 = 4\,000$.

2. (a) Justifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}996\,25 u_n + 10{,}2$.
   (b) Montrer que la superficie totale des forêts sur la Terre, au début de l'année 2014, en millions d'hectares, est $u_1 = 3\,995{,}2$.
3. Soit (d_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $d_n = u_n - 2\,720$.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel n, $d_{n+1} = 0{,}996\,25 \times d_n$.
   (b) Quelle est la nature de la suite (d_n) ? Calculer d_0.
   (c) Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de d_n, en fonction de n ; en déduire l'expression de u_n en fonction de n.
4. (a) Proposer un algorithme affichant la superficie (en millions d'hectares) occupée par les forêts sur la Terre, pour chaque année de 2013 à 2029.
   (b) À partir de quelle année la superficie des forêts présentes sur la Terre sera inférieure à 3,9 milliards d'hectares ? Préciser la démarche utilisée.

Exercice 6 (Antilles Guyane, juin 2016)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse ne rapportent, ni n'enlèvent aucun point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.

1. On donne le tableau de variation d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-1\ ;\ 3]$:

x	-1		1		2		3
variations de f	-2	↗	2	↘	-1	↗	$-0{,}5$

   Dans l'intervalle $[-1; 3]$, l'équation $f(x) = 0$ admet :
   a. exactement 3 solutions
   b. exactement 2 solutions
   c. exactement 1 solution
   d. pas de solution
2. L'équation $\ln(2x) = 2$ admet une unique solution x_0 sur $\mathbb{R}$. On a :
   a. $x_0 = 0$ **b.** $x_0 = \dfrac{e^2}{2}$ **c.** $x_0 = \dfrac{\ln 2}{2}$ **d.** $x_0 = 3{,}694\,5$
3. La suite (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 400$ et de raison $\dfrac{1}{2}$.
   La somme $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$ est égale à :
   a. $2 \times (1 - 0{,}5^{10})$ **b.** $2 \times (1 - 0{,}5^{11})$
   c. $800 \times (1 - 0{,}5^{10})$ **d.** $800 \times (1 - 0.5^{11})$
4. On considère l'algorithme ci-dessous :

Variables :	n est un nombre entier naturel
	U est un nombre réel
Traitement :	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à U la valeur 50
	Tant que $U < 120$ faire
	U prend la valeur $1{,}2 \times U$
	n prend la valeur $n + 1$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

   En fin d'exécution, cet algorithme affiche la valeur :
   a. 4 **b.** 124,416 **c.** 5 **d.** 96
5. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = 2 + 3\ln(x)$.
   La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 a pour équation :
   a. $y = \dfrac{3}{x}$ **b.** $y = 3x - 1$ **c.** $y = 3x$ **d.** $y = 3x + 2$