Récurrence

Exercice 1

Soit $q \neq 1$. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Exercice 2

Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, la dérivée de $x \mapsto x^n$ est $x \mapsto nx^{n-1}$.
Aide : Utiliser la formule $(uv)' =$ ....

Exercice 3

Démontrer par récurrence que, pour tout entier n supérieur ou égal à 6,

$$2^n \geqslant (n+1)^2.$$

Exercice 4

On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 2}{u_n + 1} \end{cases}.$$

1. Soit f la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{4x-2}{x+1}.$$

   (a) Étudier les variations de f sur $[1; +\infty[$.
   (b) En déduire que, pour tout $x \in [1; +\infty[$, $f(x) \geqslant 1$.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.
3. Démontrer par récurrence que la suite u est décroissante.

Exercice 5

On considère la suite u définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_1 &= 2 \\ u_{n+2} &= 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 0$, « pour tout entier $m \leqslant n$, $u_m = 2^m$ ».
Remarque : cela permet de démontrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = 2^n$ (en prenant $m = n$).