Suites

∽

Exercice 1
Soit u la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = & 0 \\ u_{n+1} = & \frac{1}{3}u_n + 2 \end{cases}$$

1. La suite u est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ?
2. Soit w la suite définie par : $w_n = u_n - 3$.
   (a) Démontrer que w est géométrique
   (b) Déterminer alors l'expression de w_n puis celle de u_n en fonction n.
   (c) En déduire la limite de la suite u.

Exercice 2
On considère la fonction g définie par $g(x) = x^2$.
On définit la suite u par $u_0 = 0{,}7$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer que $u_n \in]0;1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Démontrer que u est décroissante.
3. En déduire que u converge et déterminer sa limite.

Exercice 3
Soit u la suite définie pour tout $n \geqslant 0$ par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{3^n}$$

1. Démontrer que u est croissante.
2. (a) Déterminer une expression explicite de u_n en fonction de n.
   (b) Démontrer alors que u est majorée par $\frac{3}{2}$.
3. Que peut-on déduire des questions précédentes ?

Exercice 4
Soit u la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = & 1 \\ u_{n+1} = & 2u_n + 3 \end{cases}$$

1. Démontrer que pour tout entier n, $u_n > 0$.
2. En déduire que la suite u est croissante.
3. Démontrer que si u est majorée, alors elle converge vers un réel négatif.
4. Démontrer alors que u n'est pas majorée et déterminer sa limite.