

**Exercice 1 (Bac S Pondichéry, 26 avril 2017)**

On considère deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  :

- la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et pour tout entier naturel  $n$  :  $u_{n+1} = 2u_n - n + 3$  ;
- la suite  $(v_n)$  définie, pour tout entier naturel  $n$ , par  $v_n = 2^n$ .

**Partie A : Conjectures**

Florent a calculé les premiers termes de ces deux suites à l'aide d'un tableur.

Une copie d'écran est donnée ci-dessous.

	A	B	C
1	rang $n$	terme $u_n$	terme $v_n$
2	0	1	1
3	1	5	2
4	2	12	4
5	3	25	8
6	4	50	16

1. Quelles formules ont été entrées dans les cellules B3 et C3 pour obtenir par copie vers le bas les termes des deux suites ?
2. Pour les termes de rang 10, 11, 12 et 13 Florent obtient les résultats suivants :

12	10	3 080	1 024
13	11	6 153	2 048
14	12	12 298	4 096
15	13	24 587	8 192

Conjecturer les limites des suites  $(u_n)$  et  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ .

**Partie B : Étude de la suite  $(u_n)$** 

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$ .
2. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .
3. Déterminer le rang du premier terme de la suite supérieur à 1 million.

**Partie C : Étude de la suite  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$** 

1. Démontrer que la suite  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$  est décroissante à partir du rang 3.
2. On admet que, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 4, on a :  $0 < \frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n}$ .

Déterminer la limite de la suite  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ .