LYCÉE ALFRED KASTLER **TS**
2017–2018

Devoir maison n°02 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. (a) On a $n^2 > 4 \Leftrightarrow n > 2$ car la fonction racine carré est croissante sur $[0; +\infty[$.
Ainsi l'ensemble des solutions est l'ensemble des entiers strictement supérieurs à 2.
Autrement dit ce sont les entiers de l'intervalle $[3; +\infty[$.

   (b) On a $\dfrac{1}{n} < \dfrac{2}{5} \Leftrightarrow n > \dfrac{5}{2}$ car la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.
Ainsi l'ensemble des solutions est l'ensemble des entiers strictement supérieurs à $\dfrac{5}{2}$.
Autrement dit ce sont les entiers de l'intervalle $[3; +\infty[$.

2. (a) On a $x^2 > 4 \Leftrightarrow |x| > 2$ car la fonction racine carré est croissante sur $[0; +\infty[$.
(⚠ On rappelle que $\sqrt{x^2}$ n'est pas forcément égale à x, en particulier si $x < 0$)
   - Quand $x > 0$, alors l'inéquation équivaut à $x > 2$.
   - Quand $x < 0$, alors l'inéquation équivaut à $-x > 2$, donc à $x < -2$.

   Ainsi, $\mathcal{S} =]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$.
Une autre manière de résoudre cette inéquation, préférable pour éviter tout oubli, se fait en étudiant le signe d'une expression polynomiale de degré 2 :

$$x^2 > 4 \Leftrightarrow x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) > 0$$

   Les racines de $x^2 - 4$ sont -2 et 2 et le coefficient a vaut 1 et est positif. Donc l'expression est positive à l'extérieur des racines. On retrouve bien $\mathcal{S} =]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$.

   (b) Ici encore, x peut être négatif, donc il n'est pas question d'appliquer la fonction inverse à cette inéquation sans précaution.
   - Si $x > 0$, alors $\dfrac{1}{x} < \dfrac{2}{5} \Leftrightarrow x > \dfrac{5}{2}$.
   - Si $x < 0$, alors $\dfrac{1}{x} < \dfrac{2}{5}$ est toujours vraie car $\dfrac{1}{x} < 0$ et $\dfrac{2}{5} > 0$.

   Ainsi, $\mathcal{S} =]-\infty; 0[\cup \left]\dfrac{5}{2}; +\infty\right[$.

3. Plutôt que résoudre par cas, on peut se ramener à l'étude du signe d'un quotient :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x-3} \geqslant 2x - 5 &\Leftrightarrow \frac{1}{x-3} - 2x + 5 \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{x-3} + \frac{(-2x+5)(x-3)}{x-3} \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{1 - 2x^2 + 6x + 5x - 15}{x-3} \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{-2x^2 + 11x - 14}{x-3} \geqslant 0
\end{aligned}$$

   On étudie le signe de chacun des facteurs :

   - $x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$

- Pour $-2x^2 + 11x - 14$, on calcule $\Delta = 11^2 - 4 \times (-2) \times (-14) = 9 = 3^2 > 0$.
  Il y a donc deux racines, $x_1 = \dfrac{-11-3}{-4} = \dfrac{7}{2} = 3{,}5$ et $x_2 = \dfrac{-11+3}{-4} = 2$.
  De plus $a = -2 < 0$.

On obtient alors le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		2		3		$3{,}5$		$+\infty$
$-2x^2 + 11x - 14$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$x - 3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{-2x^2 + 11x - 14}{x-3}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Ainsi, $\mathcal{S} = \left]-\infty; 2\right] \cup \left]3; 3{,}5\right]$.

Exercice 2

1. La proposition est vraie, puisque si u diverge vers $+\infty$, autrement dit si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, on sait par définition que quelque soit $A > 0$, il existe un entier (que l'on peut noter) N tel que pour tout entier $n \geqslant N$, $u_n > A$. Puisque cela est vrai quelque soit A, c'est vrai en particulier pour $A = 1\ 000$.

2. (a) La réciproque de cette proposition est :

   « Si il existe un entier N tel que si $n \geqslant N$ alors $u_n > 1\ 000$, alors u diverge vers $+\infty$ »

   (b) Cette proposition réciproque est fausse. Il suffit de donner un contre-exemple. Par exemple, $u_n = 1\ 001$. Tous les termes de la suite sont supérieurs à 1 000 (donc $N = 0$ convient), mais u est constante donc elle converge vers 1 001, elle ne diverge pas vers $+\infty$.