Devoir maison n°03 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. On dérive la fonction f. On a $f(x) = 7 - 2 \times \dfrac{1}{u}$ avec $u(x) = x + 3$.

   Alors $u'(x) = 1$ et $f' = 0 - 2 \times \left(\dfrac{1}{u}\right)' = -2 \times \dfrac{-u'}{u^2}$.

   Donc $f'(x) = -2 \times \dfrac{-1}{(x+3)^2} = \dfrac{2}{(x+3)^2} > 0$.

   Ainsi f est croissante sur $[0; +\infty[$

2. On résout :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow 7 - \frac{2}{x+3} = x \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{x+3} = 7 - x \\ &\Leftrightarrow 2 = (7-x)(x+3) \\ &\Leftrightarrow 2 = -x^2 + 4x + 21 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4x - 19 = 0 \end{aligned}$$

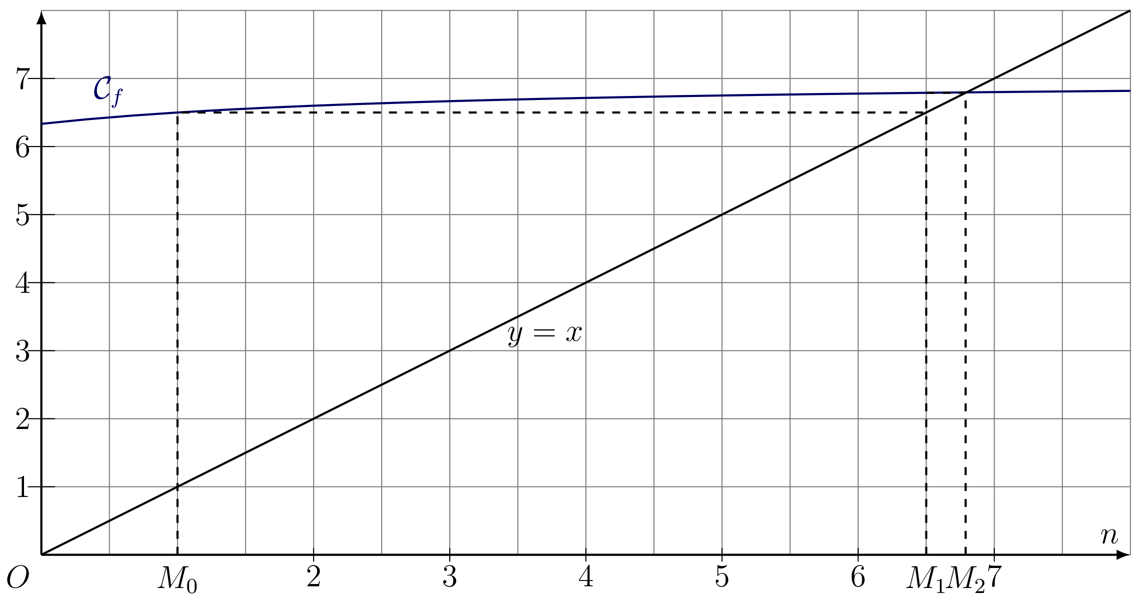
   On obtient une équation polynomiale de degré 2.

   On calcule $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-19) = 16 + 76 = 92 = 4 \times 23 > 0$.

   Il y a alors deux racines, $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4 - 2\sqrt{23}}{2} = 2 - \sqrt{23}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 2 + \sqrt{23}$.

   Le nombre α recherché est l'unique solution positive : $\alpha = 2 + \sqrt{23} \simeq 6{,}80$.

3. (a) La représentation graphique est la suivante :



   (b) Voir la figure ci-dessus (la construction est donnée par les traits en pointillés).

   (c) On peut conjecturer que la suite u est croissante et que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.

4. Soit $\mathcal{P}(n)$: « $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$ ».

   Initialisation : $\mathcal{P}(0)$: « $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant \alpha$ ». Or $u_0 = 1$ et $u_1 = 6{,}5$ et on sait que $\alpha \simeq 6{,}80$. Donc $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant \alpha$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   Étape de récurrence : On suppose que pour un certain entier $n \geqslant 0$ $\mathcal{P}(n)$ est vraie, autrement dit que $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$, et on doit démontrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est à dire que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \alpha$.

   On sait donc déjà par hypothèse de récurrence que $0 \leqslant u_{n+1}$.

   De plus, toujours par hypothèse de récurrence, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$, et on sait que f est croissante sur $[0; +\infty[$, donc $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(\alpha)$, autrement dit $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \alpha$.

   (on rappelle que $f(\alpha) = \alpha$ et que $u_{n+1} = f(u_n)$, donc $u_{n+2} = f(u_{n+1})$).

   On a donc bien $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \alpha$: $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   Conclusion : $\mathcal{P}(0)$ est vraie et $\mathcal{P}$ est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence, quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, autrement dit $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.

5. On peut maintenant seulement en déduire que la suite u est croissante (car $u_n \leqslant u_{n+1}$).

   Plus tard dans l'année nous pourrons en déduire que u est majorée (par α) et que, comme elle est croissante et majorée, elle converge. Mais nous ne pouvons pas en déduire directement qu'elle converge vers α.

   Cependant, si elle converge vers une limite l, on peut en déduire que la limite l vérifie $l = f(l)$ (car $u_{n+1} = f(u_n)$ et car u_{n+1} et u_n ont la même limite), autrement dit l est solution de l'équation $f(x) = x$. Puisque u est croissante, la limite est supérieure à $u_0 = 1$. Or α est la seule solution de cette équation supérieure à 1. On en déduit finalement que u converge vers α.