

Devoir maison n°04 – mathématiques
Correction**Exercice 1**

On remarque que $-0,1(1+a^2) < 0$, donc la courbe représentative de la fonction f polynomiale de degré 2 est une parabole dont les branches sont orientées vers le bas.

Ainsi la fonction f admet un maximum correspondant au sommet de la parabole.

On sait que l'abscisse du sommet est donnée par la formule :

$$x = \frac{-B}{2A} = \frac{-a}{2 \times (-0,1(1+a^2))} = \frac{a}{0,2(1+a^2)}$$

Pour obtenir le maximum on remplace alors x dans l'expression :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a}{0,2(1+a^2)}\right) &= -0,1(1+a^2) \times \left(\frac{a}{0,2(1+a^2)}\right)^2 + a \times \frac{a}{0,2(1+a^2)} \\ &= -0,1 \times \frac{(1+a^2) \times a^2}{0,04 \times (1+a^2)^2} + \frac{a^2}{0,2(1+a^2)} \\ &= -\frac{5}{2} \frac{a^2}{1+a^2} + 5 \frac{a^2}{1+a^2} && \text{(car } \frac{0,1}{0,04} = \frac{5}{2} \text{ et } \frac{1}{0,2} = 5) \\ &= \frac{5}{2} \frac{a^2}{1+a^2} \\ &= \frac{5a^2}{2(1+a^2)} \end{aligned}$$

Exercice 2

On choisit un individu au hasard dans la population. On définit les événements :

V : « l'individu a été vacciné » ;

M : « l'individu est malade ».

L'énoncé se traduit alors ainsi :

$$\mathbb{P}(V) = \frac{1}{4} \quad \mathbb{P}_M(V) = \frac{1}{5} \quad \mathbb{P}_M(\bar{V}) = \frac{4}{5} \quad \mathbb{P}_V(M) = \frac{1}{12}$$

On en déduit rapidement que $\mathbb{P}(\bar{V}) = 1 - \mathbb{P}(V) = \frac{3}{4}$.

On cherche $\mathbb{P}_{\bar{V}}(M)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\bar{V}}(M) &= \frac{\mathbb{P}(\bar{V} \cap M)}{\mathbb{P}(\bar{V})} && \text{par définition} \\ &= \frac{\mathbb{P}(M) \times \mathbb{P}_M(\bar{V})}{\mathbb{P}(\bar{V})} && \text{par formule du cours} \\ &= \frac{(\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}_V(M) + \mathbb{P}(\bar{V}) \times \mathbb{P}_{\bar{V}}(M)) \times \mathbb{P}_M(\bar{V})}{\mathbb{P}(\bar{V})} && \text{par la formule des probabilités totales} \end{aligned}$$

Notons $x = \mathbb{P}_{\bar{V}}(M)$. Alors en remplaçant on obtient l'équation suivante que l'on résout :

$$\begin{aligned}x &= \frac{\left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{12} + \frac{3}{4} \times x\right) \times \frac{4}{5}}{\frac{3}{4}} \Leftrightarrow \frac{3}{4}x = \frac{1}{60} + \frac{3}{5}x \\&\Leftrightarrow \frac{3}{4}x - \frac{3}{5}x = \frac{1}{60} \\&\Leftrightarrow \frac{15 - 12}{20}x = \frac{1}{60} \\&\Leftrightarrow \frac{3}{20}x = \frac{1}{60} \\&\Leftrightarrow x = \frac{1}{60} \times \frac{20}{3} = \frac{1}{9}\end{aligned}$$

Ainsi, la probabilité de tomber malade pour un individu non-vacciné est $\frac{1}{9}$.