LYCÉE ALFRED KASTLER **TS**

2017–2018

Devoir maison n°05 – mathématiques

Donné le 18/10/2017 – à rendre le 08/11/2017

Exercice 1

Soit, quelque soit l'entier $n \geqslant 1$, $f_n(x) = 2x - 2 + \dfrac{\sqrt{x}}{n}$ définie sur $[0; +\infty[$.

1. Démontrer que la fontion f_n est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
2. On souhaite démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ a une unique solution sur $[0; +\infty[$.
   (a) Justifier alors que l'équation $f_n(x) = 0$ n'a aucune solution sur $[1; +\infty[$.
   (b) Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ a une unique solution sur $]0; 1[$, notée α_n.
   (c) Conclure.
3. Démontrer que pour tout entier n, $f_n\left(\alpha_{n+1}\right) > 0$.
4. Démontrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geqslant 1}$ est croissante.
5. Justifier que quelque soit $n \geqslant 1$, $\alpha_n = 1 - \dfrac{\sqrt{\alpha_n}}{2n}$.
6. On admet que la suite $(\alpha_n)_{n \geqslant 1}$ est convergente. Déterminer alors sa limite.

LYCÉE ALFRED KASTLER **TS**

2017–2018

Devoir maison n°05 – mathématiques

Donné le 18/10/2017 – à rendre le 08/11/2017

Exercice 1

Soit, quelque soit l'entier $n \geqslant 1$, $f_n(x) = 2x - 2 + \dfrac{\sqrt{x}}{n}$ définie sur $[0; +\infty[$.

1. Démontrer que la fontion f_n est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
2. On souhaite démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ a une unique solution sur $[0; +\infty[$.
   (a) Justifier alors que l'équation $f_n(x) = 0$ n'a aucune solution sur $[1; +\infty[$.
   (b) Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ a une unique solution sur $]0; 1[$, notée α_n.
   (c) Conclure.
3. Démontrer que pour tout entier n, $f_n\left(\alpha_{n+1}\right) > 0$.
4. Démontrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geqslant 1}$ est croissante.
5. Justifier que quelque soit $n \geqslant 1$, $\alpha_n = 1 - \dfrac{\sqrt{\alpha_n}}{2n}$.
6. On admet que la suite $(\alpha_n)_{n \geqslant 1}$ est convergente. Déterminer alors sa limite.