LYCÉE ALFRED KASTLER **TS**
2017–2018

Devoir maison n°05 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. On dérive (directement) la fonction f_n sur $]0;+\infty[$ (elle n'est pas dérivable en 0) :
   $f_n{}'(x) = 2 + \dfrac{1}{2n\sqrt{x}}$
   Or $n \geqslant 1$ et la racine carrée est positive, donc $f_n{}'(x) > 0$.
   La fonction f_n est bien strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

2. (a) On a $f_n(1) = \dfrac{1}{n} > 0$. Or la fonction f_n est strictement croissante, donc quelque soit $x > 1$, $f_n(x) > f_n(1) > 0$.
   On en conclut que l'équation $f_n(x) = 0$ n'a aucune solution sur $[1;+\infty[$.

   (b)
   - f_n est continue sur $]0;1[$ car elle est dérivable sur cet intervalle (mais pas en 0 !).
   - $f_n(0) = -2$ et $f_n(1) = \dfrac{1}{n}$, donc $f_n(0) = -2 < 0 < \dfrac{1}{n} = f_n(1)$.
   - f_n est strictement croissante sur $]0;1[$

   Alors d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution α_n de l'équation $f_n(x) = 0$ sur $]0;1[$.

   (c) L'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0;1[$, aucune sur $[1;+\infty[$ et $f_n(0) \neq 0$.
   Donc l'équation admet effectivement une unique solution sur $[0;+\infty[$.

3. On a $f_n(\alpha_{n+1}) = 2\alpha_{n+1} - 2 + \dfrac{\sqrt{\alpha_{n+1}}}{n} = 2\alpha_{n+1} - 2 + \dfrac{\sqrt{\alpha_{n+1}}}{n+1} \times \dfrac{n+1}{n}$.
   Or pour $n \geqslant 1$, $\dfrac{n+1}{n} > 1$ (car $n+1 > n$).
   Donc $\dfrac{\sqrt{\alpha_{n+1}}}{n+1} \times \dfrac{n+1}{n} > \dfrac{\sqrt{\alpha_{n+1}}}{n+1}$
   puis $2\alpha_{n+1} - 2 + \dfrac{\sqrt{\alpha_{n+1}}}{n+1} \times \dfrac{n+1}{n} > 2\alpha_{n+1} - 2 + \dfrac{\sqrt{\alpha_{n+1}}}{n+1}$
   autrement dit $f_n(\alpha_{n+1}) > f_{n+1}(\alpha_{n+1})$. Or par définition de α_{n+1}, $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$.
   Donc on a bien $f_n(\alpha_{n+1}) > 0$.

4. On sait que $f_n(\alpha_n) = 0$ et $f_n(\alpha_{n+1}) > 0$, autrement dit $f_n(\alpha_{n+1}) > f_n(\alpha_n)$.
   Or f_n est strictement croissante, donc nécessairement $\alpha_{n+1} > \alpha_n$.
   Autrement dit la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ est bien croissante.

5. On a :
$$\begin{aligned} f_n(\alpha_n) = 0 &\Leftrightarrow 2\alpha_n - 2 + \frac{\sqrt{\alpha_n}}{n} = 0 \\ &\Leftrightarrow 2\alpha_n = 2 - \frac{\sqrt{\alpha_n}}{n} \\ &\Leftrightarrow \alpha_n = 1 - \frac{\sqrt{\alpha_n}}{2n} \end{aligned}$$

6. La suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ étant admise convergente, elle a une limite finie, que l'on note l.
   Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\alpha_n} = \sqrt{l}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{\sqrt{\alpha_n}}{2n} = 1$.
   Mais $1 - \dfrac{\sqrt{\alpha_n}}{2n} = \alpha_n$ d'après la question précédente. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$.