LYCÉE ALFRED KASTLER **TS**

2017–2018

Devoir maison n°06 – mathématiques

Correction

Exercice 1

1. On dérive la fonction f_k qui est de la forme uv avec $u(x) = x + k$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$.
   Alors $u'(x) = 1$ et $v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$.
   Ensuite, $(uv)' = u'v + uv'$, donc ${f_k}'(x) = \mathrm{e}^{-x} - (x+k)\,\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(1 - x - k)$.
   Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$, f' est du signe de $(1 - x - k)$. Or $1 - x - k > 0 \Leftrightarrow x < 1 - k$.
   On a alors le tableau suivant :

x	$-\infty$		$1-k$		$+\infty$
Signe de ${f_k}'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de f_k		$\nearrow$	e^{k-1}	$\searrow$	

   Calcul du maximum : $f_k(1-k) = (1 - k + k)\,\mathrm{e}^{-(1-k)} = 1\,\mathrm{e}^{-1+k} = \mathrm{e}^{k-1}$.
   La fonction f_k admet bien un maximum qui est atteint en $x = 1 - k$.

2. D'après la question précédente, on obtient que M_k a pour coordonnées $\left(1 - k; \mathrm{e}^{k-1}\right)$, soit $\left(1 - k; \mathrm{e}^{-(1-k)}\right)$.
   Ces coordonnées sont bien de la forme $(x; \mathrm{e}^{-x})$ avec $x = 1 - k$. Autrement dit M_k appartient bien à la courbe d'équation $y = \mathrm{e}^{-x}$.

3. (a) Nous connaissons les variations des fonctions f_k : elles sont croissantes puis décroissantes. La seule courbe qui est ainsi est donc celle de f_k, autrement dit $\mathcal{C}_k$. On en déduit que l'autre courbe, représentant une fonction strictement décroissante, est Γ.

   (b) Nous savons que $\mathcal{C}_k$ et Γ se coupent en un point d'abscisse $1 - k$ (en lequel $\mathcal{C}_k$ admet un maximum). Mais nous ne pouvons pas affirmer que $1 - k = -2$ puisque nous ne connaissons pas les unités sur les axes.
   Par contre, on sait que Γ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0; \mathrm{e}^{-0})$ soit $(0; 1)$. Sur l'axe des ordonnées, l'unité est donc d'un carreau.
   D'autre part, $f_k(0) = (0 + k)\,\mathrm{e}^{-0} = k$, donc $\mathcal{C}_k$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0; k)$. On voit alors ici que $k = 2$.
   On revient au fait que les courbes se coupent au point d'abscisse $1 - k$, donc $1 - 2 = -1$.
   Cela nous permet alors d'affirmer que sur l'axe des abscisses l'unité est de deux carreaux.
   On peut vérifier également que $f_k(-k) = 0$. Dans notre cas on a donc $f_2(-2) = 0$.
   Or la courbe coupe l'axe des abscisses à quatre carreaux avant 0, ce qui confirme le résultat précédent.

Exercice 2

On pose $X = \mathrm{e}^x$. Alors $\mathrm{e}^{2x} = (\mathrm{e}^x)^2 = X^2$ et l'équation $\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x - 2 = 0$ s'écrit $X^2 + X - 2 = 0$.
On voit observe une équation du second degré. On calcule : $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 = 3^2 > 0$. Il y a donc deux racines : $X_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1 - 3}{2} = -2$ et $X_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2}{2} = 1$.
Il reste à déterminer les valeurs de x solutions de l'équation de départ.
On doit donc résoudre $\mathrm{e}^x = -2$ et $\mathrm{e}^x = 1$.
La première équation n'a pas de solution, puisqu'une exponentielle est strictement positive.
La seconde a pour unique solution 0.
Ainsi $\mathcal{S} = \{0\}$.