

Devoir maison n°08 – mathématiques  
Donné le 29/11/2017 – à rendre le 06/12/2017

**Exercice 1**

Soit  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ .

Démontrer que pour tous réels  $a$  et  $b$  on a  $f(a+b) = \frac{f(a) + f(b)}{1 + f(a)f(b)}$ .

**Exercice 2**

Soit  $u$  et  $v$  deux suites définies par  $u_0 = 12$  et  $v_0 = 1$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , par :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$$

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $w_n = v_n - u_n$ .
  - (a) Démontrer que la suite  $w$  est géométrique.
  - (b) Justifier alors que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $w_n = -\frac{11}{12^n}$ .
  - (c) Démontrer que la suite  $w$  est convergente, et déterminer sa limite.
2.
  - (a) Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $v_n < u_n$ .
  - (b) Démontrer que  $u$  est décroissante et que  $v$  est croissante.
  - (c) Démontrer que  $u$  et  $v$  sont convergentes.