Devoir maison n°08 – mathématiques
Correction

Exercice 1

Tout d'abord, $f(a+b) = \dfrac{\mathrm{e}^{a+b} - \mathrm{e}^{-a-b}}{\mathrm{e}^{a+b} + \mathrm{e}^{-a-b}}$.
Ensuite,

$$\begin{aligned} f(a) + f(b) &= \frac{\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^{-a}}{\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^{-a}} + \frac{\mathrm{e}^b - \mathrm{e}^{-b}}{\mathrm{e}^b + \mathrm{e}^{-b}} \\ &= \frac{(\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^{-a})(\mathrm{e}^b + \mathrm{e}^{-b}) + (\mathrm{e}^b - \mathrm{e}^{-b})(\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^{-a})}{(\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^{-a})(\mathrm{e}^b + \mathrm{e}^{-b})} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 1 + f(a)f(b) &= 1 + \frac{\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^{-a}}{\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^{-a}} \times \frac{\mathrm{e}^b - \mathrm{e}^{-b}}{\mathrm{e}^b + \mathrm{e}^{-b}} \\ &= \frac{(\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^{-a})(\mathrm{e}^b + \mathrm{e}^{-b}) + (\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^{-a})(\mathrm{e}^b - \mathrm{e}^{-b})}{(\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^{-a})(\mathrm{e}^b + \mathrm{e}^{-b})} \end{aligned}$$

Le quotient de deux fractions ayant le même dénominateur est égal au quotient de leurs numérateurs. Alors :

$$\begin{aligned} \frac{f(a) + f(b)}{1 + f(a)f(b)} &= \frac{(\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^{-a})(\mathrm{e}^b + \mathrm{e}^{-b}) + (\mathrm{e}^b - \mathrm{e}^{-b})(\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^{-a})}{(\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^{-a})(\mathrm{e}^b + \mathrm{e}^{-b}) + (\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^{-a})(\mathrm{e}^b - \mathrm{e}^{-b})} \\ &= \frac{\mathrm{e}^a \mathrm{e}^b + \mathrm{e}^a \mathrm{e}^{-b} - \mathrm{e}^{-a} \mathrm{e}^b - \mathrm{e}^{-a} \mathrm{e}^{-b} + \mathrm{e}^b \mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b \mathrm{e}^{-a} - \mathrm{e}^{-b} \mathrm{e}^a - \mathrm{e}^{-b} \mathrm{e}^{-a}}{\mathrm{e}^a \mathrm{e}^b + \mathrm{e}^a \mathrm{e}^{-b} + \mathrm{e}^{-a} \mathrm{e}^b + \mathrm{e}^{-a} \mathrm{e}^{-b} + \mathrm{e}^a \mathrm{e}^b - \mathrm{e}^a \mathrm{e}^{-b} - \mathrm{e}^{-a} \mathrm{e}^b + \mathrm{e}^{-a} \mathrm{e}^{-b}} \\ &= \frac{2\,\mathrm{e}^a \mathrm{e}^b - 2\,\mathrm{e}^{-a} \mathrm{e}^{-b}}{2\,\mathrm{e}^a \mathrm{e}^b + 2\,\mathrm{e}^{-a} \mathrm{e}^{-b}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{a+b} - \mathrm{e}^{-a-b}}{\mathrm{e}^{a+b} + \mathrm{e}^{-a-b}} \\ &= f(a+b) \end{aligned}$$

Exercice 2

1. (a) On exprime :

$$\begin{aligned} \frac{w_{n+1}}{w_n} &= \frac{v_{n+1} - u_{n+1}}{v_n - u_n} \\ &= \frac{\dfrac{u_n + 3v_n}{4} - \dfrac{u_n + 2v_n}{3}}{v_n - u_n} \\ &= \frac{\dfrac{3(u_n + 3v_n) - 4(u_n + 2v_n)}{12}}{v_n - u_n} \\ &= \frac{3u_n + 9v_n - 4u_n - 8v_n}{12(v_n - u_n)} \\ &= \frac{-u_n + v_n}{12(v_n - u_n)} \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Le résultat est constant (il ne dépend pas de n), donc w est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{12}$.

(b) Le premier terme de la suite w est $w_0 = v_0 - u_0 = 1 - 12 = -11$.

Alors, comme w est géométrique, $w_n = w_0 \times q^n = -11 \times \left(\dfrac{1}{12}\right)^n = -\dfrac{11}{12^n}$.

(c) Comme $12 > 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 12^n = +\infty$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$.

Autrement dit, w converge vers 0.

2. (a) On sait que $w_n = -\dfrac{11}{12^n}$, donc quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $w_n < 0$.

Or $w_n = v_n - u_n$, donc $v_n - u_n < 0$, autrement dit $v_n < u_n$

(b) On exprime : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} - u_n = \dfrac{-2u_n + 2v_n}{3} = \dfrac{2w_n}{3} < 0$ (car $w_n < 0$).

Donc u est décroissante.

De même manière : $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = \dfrac{u_n - v_n}{4} = \dfrac{-w_n}{4} > 0$.

Donc v est croissante.

(c) u est minorée par v_0 car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > v_n$ et comme v est croissante, $v_n \geqslant v_0$, donc $u_n > v_0$.

Ainsi, u est décroissante et minorée, donc elle converge.

v est majorée par u_0 car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n < u_n$ et comme u est décroissante, $u_n \leqslant u_0$, donc $v_n < u_0$.

Ainsi, v est décroissante et majorée, donc elle converge.