LYCÉE ALFRED KASTLER **TS**

2017–2018

Devoir maison n°09 – mathématiques

Correction

Exercice 1

1. On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer **une fois** le ballon.
   On définit l'événement S (« succès ») comme étant le fait que le ballon passe dans le cercle.
   On a alors $\mathbb{P}(S) = p = 0{,}75$ d'après l'énoncé. (Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli).
   On répète $n = 20$ fois cette expérience de manière indépendante, et on s'intéresse au nombre X de succès. (Il s'agit d'un schéma de Bernoulli).
   Alors X suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}75$. On note $X \sim \mathscr{B}(20; 0{,}75)$.
2. On utilise la calculatrice pour calculer les probabilités :
   $$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X \geqslant 10) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant 9) \simeq 1 - 3{,}9 \times 10^{-03} \simeq 0{,}9961$$
   et
   $$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(X < 16) = \mathbb{P}(X \leqslant 15) \simeq 0{,}5852$$
3. On a $A \cap B$: « le ballon est passé par le cercle entre 10 et 15 fois inclues ».
   On peut noter aussi $A \cap B$: « $10 \leqslant X \leqslant 15$ ».
   Par suite, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(10 \leqslant X \leqslant 15) = \mathbb{P}(X \leqslant 15) - \mathbb{P}(X \leqslant 9) \simeq 0{,}5812$.
4. On utilise la formule : $\mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \simeq \dfrac{0{,}5812}{0{,}5852} \simeq 0{,}9932$.
   Il s'agit de la probabilité que le ballon soit passé au moins 10 fois dans le cercle sachant qu'il y est passé strictement moins de 16 fois.

Exercice 2

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$v_{n+1} - v_n = {v_n}^2 - 3v_n + 4 - v_n = {v_n}^2 - 4v_n + 4 = (v_n - 2)^2 \geqslant 0$$
   Par conséquent, $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$ et la suite v et croissante.
2. On suppose que la suite v converge vers un réel ℓ. Alors
   $$\lim_{n\to+\infty} v_{n+1} = \ell \text{ et } \lim_{n\to+\infty} v_{n+1} = \ell^2 - 3\ell + 4$$
   De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = {v_n}^2 - 3v_n + 4$. Par unicité de la limite, on obtient que
   $$\ell = \ell^2 - 3\ell + 4.$$
   Le réel ℓ est donc solution de l'équation
   $$x = x^2 - 3x + 4.$$
   On résout cette équation :
   $$x = x^2 - 3x + 4 \Leftrightarrow 0 = x^2 - 3x + 4 - x \Leftrightarrow 0 = x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow 0 = (x-2)^2 \Leftrightarrow 0 = x - 2 \Leftrightarrow x = 2.$$
   On a ainsi démontré que si v converge alors sa limite est 2.
3. Supposons que la suite v est majorée. Comme une suite croissante et majorée converge, on peut alors affirmer que la suite v converge. Alors d'après la question précédente, sa limite est 2.
   Cependant, une suite croissante et convergente est majorée par sa limite. La suite v est donc majorée par 2. Mais ceci est absurde car le premier terme de la suite v est 3.
   Par conséquent, l'hypothèse faite au départ est fausse et la suite v n'est pas majorée.
4. Comme v est croissante et non majorée, elle diverge vers $+\infty$.