LYCÉE ALFRED KASTLER **TS**

2017–2018

Devoir maison n°10 – mathématiques

Donné le 10/01/2018 – à rendre le 17/01/2018

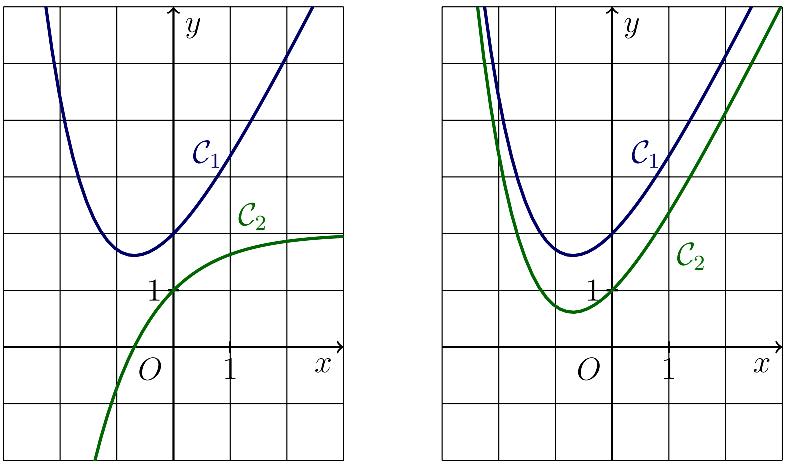
Exercice 1

On admet que la suite (S_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ converge. Démontrer que, pour tout entier $m \geqslant 2$, la suite (T_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ par $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^m}$ converge.

Exercice 2

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on nomme $\mathcal{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f et $\mathcal{C}_2$ la courbe représentative de la fonction f', dérivée de f.
Le point $A(0; 2)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_1$.
Le point $B(0; 1)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_2$.

1. Dans les deux situations ci-dessous, on a tracé la courbe $\mathcal{C}_1$ correctement, mais la courbe $\mathcal{C}_2$ n'est la bonne que dans l'une des deux situations. Laquelle est la bonne situation ? Justifier.



2. Déterminer l'équation réduite de la droite Δ tangente à la courbe $\mathcal{C}_1$ en A.
3. On sait que, pour tout réel x, $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + ax + b$ où a et b sont deux nombres réels.
   Déterminer la valeur de b puis celle de a en justifiant.

Exercice 3

1. Démontrer que tout ensemble fini de nombres réels admet un maximum et un minimum.
   Plus précisément, démontrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, tout ensemble de n ($n \geqslant 1$) nombres réels admet nécessairement un maximum et un minimum.
2. Donner un algorithme qui demande un nombre N ($N \geqslant 1$), puis demande N nombres et affiche à la fin le maximum et le minimum des N nombres donnés.
   Cinq variables, dont N, sont suffisantes pour cet algorithme.