Devoir maison n°10 – mathématiques
Correction

Exercice 1

La suite (S_n) est croissante car $S_{n+1} - S_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$.
Or on sait que (S_n) est convergente vers un réel l, donc elle est majorée par l.
La suite (T_n) est également croissante car $T_{n+1} - T_n = \dfrac{1}{(n+1)^m} > 0$.
Démontrons que (T_n) est majorée par l, et pour cela que $T_n \leqslant S_n$.
Il suffit pour cela de démontrer que quelque soit $k \geqslant 1$, $\dfrac{1}{k^m} \leqslant \dfrac{1}{k^2}$ car alors en ajoutant terme à terme, pour k allant de 1 à n, on obtient bien $T_n \leqslant S_n$.
Or :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k^m} \leqslant \frac{1}{k^2} &\Leftrightarrow k^m \geqslant k^2 && \text{fonction inverse décroissante sur }]0;+\infty[\\
&\Leftrightarrow k^{m-2} \geqslant 1 && \text{car } k^2 > 0
\end{aligned}$$

Or $m \geqslant 2$ donc la dernière inégalité est vraie.
On peut alors conclure que $T_n \leqslant S_n$, mais comme $S_n \leqslant l$, on obtient finalement que $T_n \leqslant l$.
Autrement dit, (T_n) est majorée.
Comme elle est de plus croissante, elle converge.

Exercice 2

1. Lorsque la fonction f est décroissante, la fonction f' doit être négative. Or, la courbe $\mathcal{C}_1$ tracée montre que la fonction f est décroissante au moins sur l'intervalle $[-2;-1]$, donc la courbe $\mathcal{C}_2$ doit être située sous l'axe des abscisses sur cet intervalle. Ce n'est le cas que pour celle de la situation de gauche.
2. On lit graphiquement que $f'(0) = 1$ et $f(0) = 2$ (renseignements également donnés dans l'énoncé avec les informations sur les points A et B).
   L'équation de Δ est alors $y = f'(0)(x-0) + f(0) = 1(x-0) + 2 = x + 2$.
3. Puisque $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + ax + b$, on a $f(0) = \mathrm{e}^{-0} + a \times 0 + b = 1 + b$.
   Or $f(0) = 2$, donc on en déduit que $b = 1$.
   Ensuite, $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + a$ et donc $f'(0) = -1 + a$.
   Or $f'(0) = 1$, donc on en déduit que $a = 2$.
   Finalement, $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + 2x + 1$.

Exercice 3

1. Soit $\mathcal{P}(n)$: « tout ensemble de n nombres réels admet un maximum et un minimum. »
   initialisation :
   Tout ensemble ne contenant qu'un seul nombre x admet bien un maximum et un minimum : x est à la fois le minimum et le maximum de cet ensemble.
   En effet, quelque soit l'élément de cet ensemble (nécessairement x), il est à la fois supérieur (ou égal) et inférieur (ou égal) à x.
   Étape de récurrence :
   On suppose qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
   On doit démontrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   Soit donc E un ensemble de $n+1$ nombres réels, on doit démontrer que cet ensemble admet un maximum et un minimum.

Considérons (choisissons) un nombre x quelconque de cet ensemble. L'ensemble E privé du nombre x contient n nombres réels. Alors par hypothèse de récurrence, il admet un minimum m et un maximum M.

- Si $x < m$, alors x est un minimum de E, sinon m est encore un minimum de E.
- Si $x > M$, alors x est un maximum de E, sinon M est encore un maximum de E.

L'ensemble E admet donc bien un minimum et un maximum, et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion :

D'après le principe de récurrence on a démontré que quelque soit $n \geqslant 1$, $\mathcal{P}(n)$ est vrai. Autrement dit : tout sous-ensemble fini de $\mathbb{R}$ admet un maximum et un minimum.

2. Voici l'algorithme :

```
Variables :
    N, I, x, m, M des nombres réels
Traitement :
    Saisir N
    Saisir x
    m prend la valeur x
    M prend la valeur x
    Pour I allant de 2 à N Faire
      | Saisir x
      | Si x < m Alors
      |   | m prend la valeur x
      | FinSi
      | Si x > M Alors
      |   | M prend la valeur x
      | FinSi
    Fin Pour
    Afficher m
    Afficher M
```

Remarquer que l'algorithme « suit » la démonstration par récurrence, la boucle « Pour » correspondant à l'étape de récurrence.