Devoir maison n°11 – mathématiques
Correction

Exercice 1

On a $g(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{4 - \dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x^2} + 2}$. Alors, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$,

on obtient que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \dfrac{4-0}{0+2} = 2$ et que $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 2$.

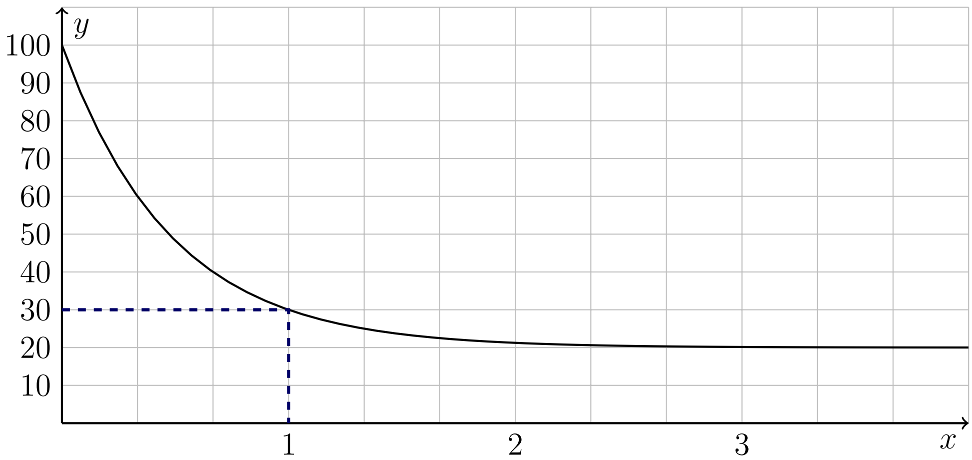
Ainsi $\mathcal{C}_g$ admet la droite d'équation $y = 2$ pour asymptote en $-\infty$ et en $+\infty$.

Il reste à déterminer la limite en 0. Or $g(x) = \dfrac{\dfrac{4x^2-1}{x^2}}{\dfrac{1+2x^2}{x^2}} = \dfrac{4x^2-1}{1+2x^2}$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \dfrac{0-1}{1+0} = -1$.

Il n'y a pas d'asymptote en 0.

Exercice 2

1. On a $\theta'(t) = C \times (-2{,}08\,\mathrm{e}^{-2{,}08t}) + 0 = -2{,}08C\,\mathrm{e}^{-2{,}08t}$
   Or $-2{,}08(\theta(t) - 20) = -2{,}08\,(C\,\mathrm{e}^{-2{,}08t} + 20 - 20) = -2{,}08C\,\mathrm{e}^{-2{,}08t}$.
   Donc on a bien $\theta'(t) = -2{,}08(\theta(t) - 20)$.
2. (a) On sait que $\theta(0) = 100$, donc $C\,\mathrm{e}^{-2{,}08\times 0} + 20 = C\,\mathrm{e}^0 + 20 = C + 20 = 100$. Ainsi, $C = 80$
   (b) On en déduit que $\theta(t) = 80\,\mathrm{e}^{-2{,}08t} + 20$.
3. (a) On sait que $\theta'(t) = -2{,}08C\,\mathrm{e}^{-2{,}08t}$.
   Or une exponentielle est toujours positive et $C = 80 > 0$.
   Donc $\theta'(t) < 0$, et donc θ est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.
   (b) On a $\lim\limits_{t\to+\infty} -2{,}08t = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$.
   Donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-2{,}08t} = 0$, puis $\lim\limits_{t\to+\infty} \theta(t) = C \times 0 + 20 = 20$.
   (c) La courbe représentative de θ est la suivante :



4. On a 20 min $= \dfrac{1}{3}$ h. On doit alors calculer : $\theta\left(\dfrac{1}{3}\right) = 80 \times \mathrm{e}^{-\frac{2{,}08}{3}} + 20 \simeq 60$.
   De même, 30 min $= 0{,}5$ h et on a $\theta(0{,}5) \simeq 48$.
   Donc la température du corps au bout de 20 minutes est d'environ 60°C. Au bout de 30 minutes, la température est d'environ 48°C.
5. D'après la résolution graphique (voir plus haut), la température tombe à 30°C au bout d'une heure.