LYCÉE ALFRED KASTLER **TS**

2017–2018

Devoir maison n°12 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. On dérive f en utilisant la formule $(uv)' = u'v + uv'$ et le fait que $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$:
   $f'(x) = -\dfrac{1}{x}\ln x + (2-\ln x)\times\dfrac{1}{x} = \dfrac{2-2\ln x}{x} = \dfrac{2(1-\ln x)}{x}$.
   Or $x > 0$, et $1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow x < \mathrm{e}$.
   On a alors le tableau de variations suivant :

x	0		e		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
variations de f	$\Vert$	$\nearrow$	1	$\searrow$	

2. Une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse e^2 est donnée par la formule :
   $y = f'(\mathrm{e}^2)(x-\mathrm{e}^2) + f(\mathrm{e}^2) = \dfrac{-2}{\mathrm{e}^2}(x-\mathrm{e}^2) + 0 = -\dfrac{2}{e^2}x + 2$.
3. Pour déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses, on résout :
   $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \ln x = 0$ ou $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^2$ ou $x = 1$.
   Ainsi, les points d'intersections ont pour coordonnées $(1;0)$ et $(\mathrm{e}^2;0)$.

Exercice 2

1. (a) On a $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{0}{1+0} = 0$.

   (b) On a $f(x) = \dfrac{e^x\times 1}{e^x\left(\dfrac{1}{e^x}+1\right)} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{e^x}+1}$.

   De plus, comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = 0$.

   Par conséquent, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{0+1} = 1$.

   (c) On en déduit que $\mathcal{C}$ admet pour asymptotes horizontales la droite d'équation $y = 0$ en $-\infty$ et la droite d'équation $y = 1$ en $+\infty$.
2. On calcule la dérivée de f : f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = 1 + e^x$.

   Alors $u'(x) = e^x$, $v'(x) = e^x$, et $f' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

   Donc $f'(x) = \dfrac{e^x(1+e^x) - e^xe^x}{(1+e^x)^2} = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$.

   Comme un carré et une exponentielle sont toujours positifs, on en déduit que quelque soit $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$, donc que f est strictement croissante.
3. (a) L'équation de T est $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ (0 est l'abscisse de K).

   Or $f'(0) = \dfrac{1}{(1+1)^2} = \dfrac{1}{4}$ et $f(0) = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$ ($\frac{1}{2}$ est bien l'ordonnée de K).

   Donc $T : y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$.

(b) Pour étudier la position de la tangente T par rapport à la courbe $\mathcal{C}$ il suffit d'étudier sur $\mathbb{R}$ le signe de $f(x) - \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right)$. Or :

$$\begin{aligned}
f(x) - \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right) > 0 &\Leftrightarrow \frac{e^x}{1+e^x} - \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right) > 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{e^x - (1+e^x)\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right)}{1+e^x} > 0 \\
&\Leftrightarrow e^x - \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}xe^x - \frac{1}{2}e^x > 0 \quad \text{car } 1+e^x > 0 \\
&\Leftrightarrow 4e^x - x - 2 - xe^x - 2e^x > 0 \quad \text{car } 4 > 0 \\
&\Leftrightarrow 2e^x - xe^x - x - 2 > 0
\end{aligned}$$

Comme $g(x) = 2e^x - xe^x - 2 - x$, on voit donc qu'il suffit en effet d'étudier le signe de g.

(c) On a (en utilisant $\exp' = \exp$ et $(uv)' = u'v + uv'$) : $g'(x) = e^x - xe^x - 1$ et $g''(x) = -xe^x$.

(d) Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $e^x > 0$, alors $g''(x) > 0 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow x < 0$.
Par suite on obtient, ligne après ligne :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $g''(x)$		$+$	0	$-$	
variations de g'		$\nearrow$	0	$\searrow$	
signe de g'		$-$	0	$-$	
variations de g		$\searrow$	0	$\searrow$	
signe de g		$+$	0	$-$	

(e) Ainsi, $\mathcal{C}$ est au-dessus de T sur $]-\infty; 0[$, et en dessous sur $]0; +\infty[$.