Devoir maison n°13 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. La fonction f est définie pour tout réel x tel que $x > 0$ (à cause de $\ln(x)$) et $\ln(x) - 1 \neq 0$ (un dénominateur ne doit pas s'annuler).
   Or $\ln(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}$.
   Ainsi, $f(x)$ est défini sur $]0;\mathrm{e}[\cup]\,\mathrm{e};+\infty[$, et en particulier sur $\mathcal{D}$.
2. On sait que $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$, et on a $\lim\limits_{x\to 0} 2x+1 = 1$. Alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.
   On a $x > \mathrm{e} \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow \ln x - 1 > 0$.
   Alors $\lim\limits_{\substack{x\to \mathrm{e}\\ x>\mathrm{e}}} \ln x - 1 = 0^+$ et $\lim\limits_{\substack{x\to \mathrm{e}\\ x<\mathrm{e}}} \ln x - 1 = 0^-$.
   De plus, $\lim\limits_{x\to \mathrm{e}} 2x+1 = 2\,\mathrm{e}+1 > 0$.
   Alors $\lim\limits_{\substack{x\to \mathrm{e}\\ x>\mathrm{e}}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to \mathrm{e}\\ x<\mathrm{e}}} f(x) = -\infty$.
   Enfin, $f(3\,\mathrm{e}) = \dfrac{6\,\mathrm{e}+1}{\ln(3)}$ car $\ln(3\,\mathrm{e}) = \ln(3) + \ln(\mathrm{e}) = \ln(3) + 1$.
   D'après ces résultats, on en déduit qu'il y a une asymptote verticale d'équation $x = \mathrm{e}$.
3. f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x+1$ et $v(x) = \ln(x) - 1$.
   Alors $u'(x) = 2$, $v'(x) = \dfrac{1}{x}$.
   Par suite, $f' = \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ et :
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(\ln(x)-1) - (2x+1)\dfrac{1}{x}}{(\ln(x)-1)^2} \\ &= \frac{2x(\ln(x)-1) - (2x+1)}{x(\ln(x)-1)^2} \\ &= \frac{2x\ln(x) - 4x - 1}{x(\ln(x)-1)^2} = \frac{g(x)}{x(\ln(x)-1)^2} \end{aligned}$$
4. On sait que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$. Alors $\lim\limits_{x\to 0} 2x\ln(x) - 4x - 1 = 2\times 0 - 4\times 0 - 1 = -1$.
   Et on a $g(3\,\mathrm{e}) \simeq 0{,}61$
5. On a $g'(x) = 2\ln x + 2x \times \dfrac{1}{x} - 4$ (on utilise $(uv)' = u'v + uv'$). En simplifiant, on obtient $g'(x) = 2\ln x - 2$.
   On résout alors $g'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow x > \mathrm{e}$.
   Alors $g'(x)$ est négative sur $]0;\mathrm{e}[$ et positive sur $]\,\mathrm{e};3\,\mathrm{e}]$.
6. On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		e		$3\,\mathrm{e}$
Signe de $g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
variations de g	‖ -1	↘	$-2\,\mathrm{e}-1$	↗	$0{,}61$

7. D'après les variations de g, on voit que $g < 0$ sur $]0; \mathrm{e}[$.

   Ensuite, g est continue (car dérivable), strictement croissante sur $[\mathrm{e}; 3\,\mathrm{e}]$. De plus, $g(\mathrm{e}) < 0$ et $g(3\,\mathrm{e}) > 0$. Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel α dans $[\mathrm{e}; 3\,\mathrm{e}]$ (et par suite dans $]0; 3\,\mathrm{e}]$ solution de $g(x) = 0$.

   Grâce à la calculatrice on obtient $\alpha \simeq 7{,}87$.

8. On sait que sur $\mathcal{D}$, $x > 0$; de même, $(\ln(x) - 1)^2 > 0$. Le signe de $f'(x)$ est alors celui de $g(x)$.

   D'après les questions précédentes, on obtient (ne pas oublier que f n'est pas définie en e) :

x	0		e		α		$3\,\mathrm{e}$
Signe de $f'(x)$	||	$-$	||	$-$	0	$+$	
variations de f	||	0 ↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	$15{,}75$	↗	$15{,}76$