

Devoir maison n°14 – mathématiques
Correction**Exercice 1**

On a : $\ln x + \ln y = 3 \ln 5 \Leftrightarrow \ln(xy) = \ln(5^3) \Leftrightarrow xy = 5^3$.

Alors :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y = 30 \\ \ln x + \ln y = 3 \ln 5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 30 \\ xy = 5^3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 30 - x \\ x(30 - x) = 5^3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 30 - x \\ -x^2 + 30x - 5^3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On résout l'équation du second degré $-x^2 + 30x - 5^3 = 0$.

Pour cela, on calcule (sans calculatrice, par exemple en décomposant les nombres) :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 30^2 - 4 \times (-1) \times (-5^3) = (2 \times 3 \times 5)^2 - 2^2 \times 5^2 \times 5 = 2^2 \times 5^2 (3^2 - 5) = 2^2 \times 5^2 \times 4 = 20^2 > 0.$$

Il y a donc deux racines : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-30 - 20}{-2} = 25$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-30 + 20}{-2} = 5$.

On obtient alors, par le système, deux valeurs de y : $y_1 = 30 - x_1 = 5$ et $y_2 = 30 - x_2 = 25$.

Ainsi, l'ensemble des solutions du système est $\mathcal{S} = \{(5, 25); (25, 5)\}$.

Exercice 2

1. On a $z_1 = \frac{z_0 + |z_0|}{3} = \frac{1 + i + \sqrt{1^2 + 1^2}}{3} = \frac{1 + \sqrt{2} + i}{3}$.

Alors $a_1 = \frac{1 + \sqrt{2}}{3}$ et $b_1 = \frac{1}{3}$.

2. De manière générale, $z_{n+1} = \frac{a_n + ib_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{3} = \frac{a_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} + ib_n}{3}$.

Alors $a_{n+1} = \frac{a_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{3}$ et $b_{n+1} = \frac{b_n}{3}$.

3. (a) Voici le tableau complété :

K	A	B
1	0,804 7	0,333 3
2	0,558 6	0,111 1
3	0,376 0	0,037 0

(b) On a vu plus haut les expressions des a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n , sachant que les premiers termes de chacun de ces deux suites valent 1.

Cela correspond exactement aux valeurs données à A et à B dans l'algorithme.

Ainsi, l'algorithme affiche à la fin la valeur de a_N , autrement dit la partie réelle de z_N .

(c) Il suffit d'effacer la dernière ligne (Afficher A), et de placer, juste avant la ligne « Fin Pour », les lignes :

Afficher A
Afficher B