Devoir maison n°15 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. On calcule $|z_1| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$.
   Ainsi, $z_1 = 2\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. On cherche θ tel que $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ convient.
   Ainsi, $\arg(z_1) = \dfrac{\pi}{3}$ et $z_1 = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$.
2. On a $z_2 = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + \sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
3. On a $z_1z_2 = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}} = 2\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{4\pi-3\pi}{12}} = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{12}} = 2z_3$.
4. Ainsi,
$$\begin{aligned}
z_3 &= \frac{1}{2}z_1z_2 = \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\
&= \frac{1}{4}(\sqrt{2} - i\sqrt{2} + i\sqrt{6} + \sqrt{6})\\
&= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$
5. On sait que $|z_3| = 1$ et $\arg(z_3) = \dfrac{\pi}{12}$, donc on en déduit que :
$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \quad\text{et}\quad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Exercice 2

1. Soit D le point d'affixe 1 et E le point d'affixe i. Le point M ayant pour affixe z, on a $|z-1| = |z-i| \Leftrightarrow DM = EM$.
   Ainsi l'ensemble des points M dont l'affixe z vérife cette équation est la médiatrice du segment $[DE]$. Or cette médiatrice est la droite $[AB]$ d'équation $y = x$. En effet, soit $M(z)$ appartenant à la droite d'équation $y = x$. Alors $z = x + ix$, et $DM = |(x+ix)-1| = |(x-1)+ix| = \sqrt{(x-1)^2+x^2} = \sqrt{1-2x+2x^2}$ et $EM = |(x+ix)-i| = |x+i(x-1)| = \sqrt{x^2+(x-1)^2} = \sqrt{1-2x+2x^2}$. On a bien $DM = EM$.
   Autre manière de faire pour démontrer que $M \in (AB)$: on pose $z = x+iy$. Alors :
$$\begin{aligned}
|z-1| = |z-i| &\Leftrightarrow |x+iy-1| = |x+iy-i|\\
&\Leftrightarrow |(x-1)+iy| = |x+i(y-1)|\\
&\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-1)^2}\\
&\Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x+1+y^2} = \sqrt{x^2+y^2-2y+1}\\
&\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2 = x^2+y^2-2y+1 \qquad \text{(on élève au carré)}\\
&\Leftrightarrow -2x = -2y\\
&\Leftrightarrow y = x
\end{aligned}$$

Pour la condition suivante, sachant que $C(3;2)$ a pour affixe $3+2i$,
on a $|z-3-2i| \leqslant 2 \Leftrightarrow CM \leqslant 2$ Ainsi, le point M est à l'intérieur du cercle de centre C et de rayon 2.
En réunissant les deux conditions, on obtient bien que l'ensemble des points M dont l'affixe z satisfait le tout est le segment $[AB]$, autrement dit la partie de la droite $[AB]$ située à l'intérieur du cercle : L'affirmation est vraie.

2. On a $\sqrt{3}+i = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right) = 2\,\mathrm{e}^{i\dfrac{\pi}{6}}$.

   Alors

$$\begin{aligned}
(\sqrt{3}+i)^{1515} &= \left(2\,\mathrm{e}^{i\dfrac{\pi}{6}}\right)^{1515} \\
&= 2^{1515}\,\mathrm{e}^{i\dfrac{1515\pi}{6}} \\
&= 2^{1515}\,\mathrm{e}^{i\left(126\times 2\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)} \\
&= 2^{1515}\,\mathrm{e}^{i\dfrac{\pi}{2}} \\
&= 2^{1515}i \notin \mathbb{R}
\end{aligned}$$

   L'affirmation est donc fausse. Le nombre est même imaginaire pur.