Devoir maison n°16 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. On a :

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} \\
\Leftrightarrow\ & 4\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} \\
\Leftrightarrow\ & 4\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GD} \qquad \text{(Chasles)} \\
\Leftrightarrow\ & 4\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} \\
\Leftrightarrow\ & -\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0} \\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0}
\end{aligned}$$

2. En partant de la relation précédente :

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0} \\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{JD} = \overrightarrow{0} \text{ (Chasles)} \\
\Leftrightarrow\ & 2\overrightarrow{GI} + 2\overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{0} (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0} \text{ car } I \text{ est le milieu de } [AB], \text{ de même } \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD} = \overrightarrow{0}) \\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{GI} = \overrightarrow{JG}
\end{aligned}$$

   On en déduit que $\overrightarrow{GI}$ et $\overrightarrow{JG}$ sont colinéaires (en fait égaux), donc que G, I et J sont alignés, autrement dit que $G \in (IJ)$.

   On peut démontrer de même que $\overrightarrow{GL} = \overrightarrow{KG}$.

   Ainsi, $G \in (KL)$ et G appartient aux deux droites (IJ) et (KL), ce qu'il fallait démontrer.

3. Dans ABC, I est le milieu de $[AB]$ et K est le milieu de $[BC]$. On en déduit que $(IJ)//(AC)$. De même, dans le triangle ACD, comme J est le milieu de $[CD]$ et L est le milieu de $[AD]$, $(LJ)//(AC)$.

   On en déduit que $(IK)//(LJ)$.

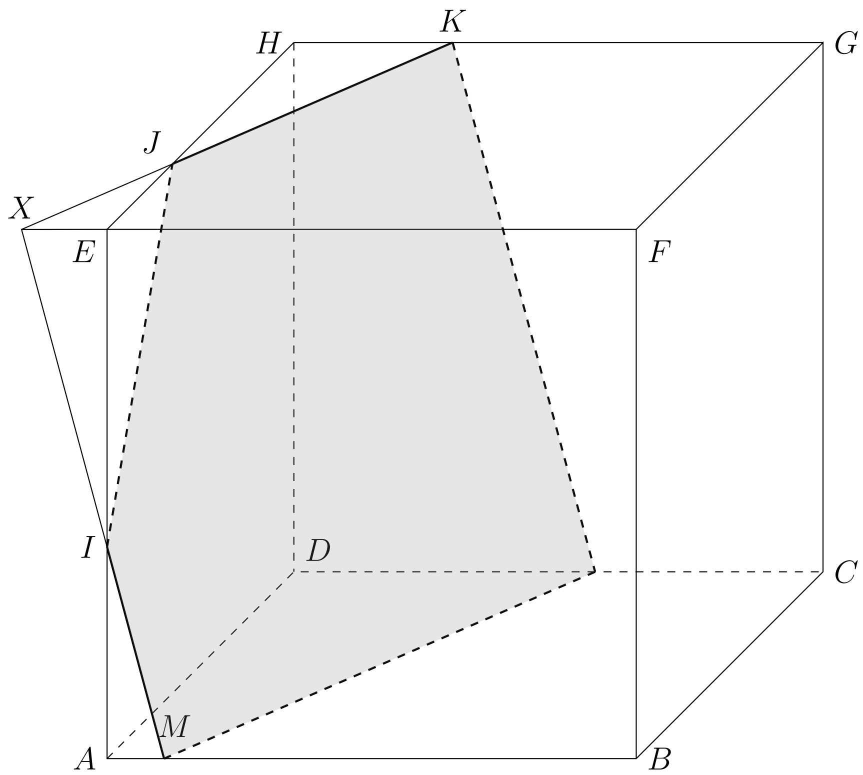
   On démontre de même que $(IL)//(JK)$.

   On en déduit que, du fait que les côtés opposés deux à deux de $IKJL$ sont parallèles, $IKJL$ est un parallélogramme.

Exercice 2

- Pour l'intersection entre (IJK) et la face $ABFE$, on sait déjà que I appartient aux deux plans. On cherche donc un second point. Pour cela, on observe que (JK) et (EF) sont sécants en un point X que l'on construit. Le point X est le point recherché : il appartient aux deux plans (IJK) et (EFI). Il suffit alors de tracer la droite (XI). On nomme M le point de (XI) appartenant à $[AB]$.
- Pour l'intersection entre (IJK) et la face $ABCD$, on observe que le plan (IJK) coupe les deux plans parallèles (EFG) et (ABC) (faces opposées du cube). Les intersections sont alors des droites parallèles. On trace donc la parallèle à (JK) passant par M.

Voir la figure ci-après :


K
H
G
J
X
E
F
I
D
C
M
A
B