

Devoir maison n°17 – mathématiques
Donné le 09/05/2018 – à rendre le 16/05/2018

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x+3}$$

1. (a) Calculer la dérivée de la fonction f .
 - (b) Déterminer sa limite en $+\infty$.
 - (c) Dresser le tableau de variation de la fonction f .
2. On définit la suite (u_n) par son terme général :

$$u_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$$

- (a) Justifier que si $n \leq x \leq n+1$, alors $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$.
 - (b) Montrer, sans chercher à calculer u_n , que pour tout entier naturel n , $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$.
 - (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
3. Soit F la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$F(x) = [\ln(x+3)]^2$$

- (a) Déterminer, pour tout réel positif x , le nombre $F'(x)$.
 - (b) On pose, pour tout entier naturel n , $I_n = \int_0^n f(x)dx$.
Calculer I_n .
4. On pose pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$$

- (a) Calculer S_n .
- (b) La suite (S_n) est-elle convergente ?