Devoir maison n°17 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. (a) f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ et $f'(x) = \dfrac{1-\ln(x+3)}{(x+3)^2}$.

   (b) On sait que $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln X}{X} = 0$. Alors, en posant $X = x+1$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

   (c) L'expression $f'(x)$ est du signe de $1-\ln(x+3)$ car $(x+3)^2 > 0$.
   Or $1-\ln(x+3) > 0 \Leftrightarrow \ln(x+3) < 1 \Leftrightarrow x+3 < \mathrm{e} \Leftrightarrow x < \mathrm{e}-3$.
   Or $\mathrm{e} < 3$, donc $\mathrm{e}-3 < 0$.
   Ainsi, sur $[0;+\infty[$, $f'(x)$ est toujours négative, et f est décroissante et on obtient :

x	0	$+\infty$
variations de f	$\dfrac{\ln 3}{3}$ ↘	0

2. (a) Si $n \leqslant x \leqslant n+1$, alors $f(n+1) \leqslant f(x) \leqslant f(n)$ par le seul fait que f est décroissante sur $[0;+\infty[$.

   (b) D'après le résultat précédent, en appliquant l'intégrale sur $[n;n+1]$, on a :
$$\int_n^{n+1} f(n+1)dx \leqslant \int_n^{n+1} f(x)dx \leqslant \int_n^{n+1} f(n)dx$$
   Or $f(n+1)$ et $f(n)$ sont constantes et l'intégrale de f sur $[n;n+1]$ (intervalle de longueur 1) est égale à u_n.
   On a donc bien $f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n)$.

   (c) On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n+1) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = 0$.
   Alors, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

3. (a) F est de la forme u^2, alors $F'(x) = 2 \times \dfrac{1}{x+3} \times \ln(x+3) = 2f(x)$.
   On en déduit que $\dfrac{1}{2}F$ est une primitive de f sur $[0;+\infty[$.

   (b) Ainsi, $I_n = \left[\dfrac{1}{2}F(x)\right]_0^n = \dfrac{1}{2}(F(n)-F(0)) = \dfrac{1}{2}((\ln(n+3))^2 - (\ln 3)^2)$.

4. (a) D'après la relation de Chasles, $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = \int_0^n f(x)dx = I_n$.

   (b) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.
   Donc la suite (I_n), c'est à dire (S_n), diverge.