Devoir surveillé n°1 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. On a $u_n = -5n^2 + 3 + \sqrt{n} = n^2\left(-5 + \dfrac{3}{n^2} + \dfrac{\sqrt{n}}{n^2}\right) = n^2\left(-5 + \dfrac{3}{n^2} + \dfrac{1}{\sqrt{n}^3}\right)$.

   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -5 + \dfrac{3}{n^2} + \dfrac{1}{\sqrt{n}^3} = -5$.

   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

2. On a $v_n = \dfrac{2n^2 - n + 2}{-5n^3 + 4} = \dfrac{n^2\left(2 - \dfrac{n}{n^2} + \dfrac{2}{n^2}\right)}{n^3\left(-5 + \dfrac{4}{n^3}\right)} = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{2 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n^2}}{-5 + \dfrac{4}{n^3}}$.

   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n^2} = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -5 + \dfrac{4}{n^3} = -5$.

   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

3. On a $\cos(n) \geqslant -1$, donc $\cos(n) + 5n - 2 \geqslant -1 + 5n - 2$, autrement dit $w_n \geqslant 5n - 3$.

   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 5n - 3 = +\infty$, donc par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$.

Exercice 2

1. Quelque soit $n \in \mathbb{N}^\star$, et quelque soit $1 \leqslant k \leqslant n$, on a $0 < n^2 + 1 \leqslant n^2 + k \leqslant n^2 + n$.

   En appliquant la fonction inverse, décroissante sur $]0; +\infty[$, on obtient :

   $\dfrac{1}{n^2+1} \geqslant \dfrac{1}{n^2+k} \geqslant \dfrac{1}{n^2+n}$, puis en multipliant par $n > 0$, $\dfrac{n}{n^2+1} \geqslant \dfrac{n}{n^2+k} \geqslant \dfrac{n}{n^2+n}$.

   En ajoutant tous les n termes (de 1 à n), on obtient alors $n \times \dfrac{n}{n^2+1} \geqslant u_n \geqslant n \times \dfrac{n}{n^2+n}$.

   Autrement dit, on a bien $\dfrac{n^2}{n^2+n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n^2}{n^2+1}$.

2. On a $\dfrac{n^2}{n^2+n} = \dfrac{n^2 \times 1}{n^2\left(1 + \dfrac{n}{n^2}\right)} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{n}}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{n} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{n^2+n} = 1$.

   De même, $\dfrac{n^2}{n^2+1} = \dfrac{n^2 \times 1}{n^2\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{n^2}}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{n^2} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{n^2+1} = 1$.

   Par conséquent, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Exercice 3

Soit $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = 5 - 4 \times 0{,}8^n$ ».

Initialisation : $\mathcal{P}(0)$: « $u_0 = 5 - 4 \times 0{,}8^0$ ».

Or $u_0 = 1$ et $5 - 4 \times 0{,}8^0 = 5 - 4 \times 1 = 1$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Étape de récurrence : On suppose que pour un certain entier n, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, donc que $u_n = 5 - 4 \times 0{,}8^n$.

On doit montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, donc que $u_{n+1} = 5 - 4 \times 0{,}8^{n+1}$.

Or

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= 0{,}8u_n + 1 && \text{par définition}\\
&= 0{,}8(5 - 4 \times 0{,}8^n) + 1 && \text{par hypothèse de récurrence}\\
&= 0{,}8 \times 5 - 4 \times 0{,}8^n \times 0{,}8 + 1\\
&= 4 - 4 \times 0{,}8^{n+1} + 1\\
&= 5 - 4 \times 0{,}8^{n+1}
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : On a montré que $\mathcal{P}(0)$ est vraie et que $\mathcal{P}$ est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

Exercice 4

On pose $u_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ (pour $n \geqslant 1$). On veut démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

Soit $a > 0$, on cherche un entier n_0 tel que quelque soit $n \geqslant n_0$, $1 - a < u_n < 1 + a$, autrement dit $1 - a < 1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 1 + a$, donc $-a < \dfrac{1}{\sqrt{n}} < a$.

Or $-a < 0$ et $\dfrac{1}{\sqrt{n}} > 0$, donc $-a < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ est toujours vraie.

On résout :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{n}} < a &\Leftrightarrow \sqrt{n} > \frac{1}{a} && \text{car la fonction inverse est décroissante sur }]0;+\infty[.\\
&\Leftrightarrow n > \frac{1}{a^2} && \text{car la fonction carré est croissante sur } [0;+\infty[.
\end{aligned}$$

Soit $n_0 = E\left(\dfrac{1}{a^2}\right) + 1$. Alors quelque soit $n \geqslant n_0$, on a $1 - a < u_n < 1 + a$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 1$.