LYCÉE ALFRED KASTLER **TS**

2017–2018

Devoir surveillé n°2 – mathématiques
18/10/2017

Exercice 1

1. Le morceau étant choisi au hasard, la loi est équirépartie. On a :
$$\mathbb{P}(C) = \frac{30}{100} \quad \mathbb{P}(V) = \frac{45}{100} \quad \mathbb{P}_C(H) = \frac{5}{6} \quad \mathbb{P}_V(\overline{H}) = \frac{5}{9}$$
2. On doit calculer $\mathbb{P}(C \cap H) = \mathbb{P}(C) \times \mathbb{P}_C(H) = \dfrac{30}{100} \times \dfrac{5}{6} = \dfrac{1}{4}$.
3. (a) Les événements C et H ne sont pas indépendants car :
$\mathbb{P}_C(H) = \dfrac{5}{6} = \dfrac{50}{60} \neq \dfrac{39}{60} = \dfrac{13}{20} = \mathbb{P}(H)$. On peut aussi montrer que $\mathbb{P}(C \cap H) \neq \mathbb{P}(C) \times \mathbb{P}(H)$.
   (b) D'après la formule des probabilités totale on a :
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(J \cap H) &= \mathbb{P}(H) - \mathbb{P}(C \cap H) - \mathbb{P}(V \cap H) \\ &= \mathbb{P}(H) - \mathbb{P}(C \cap H) - \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}_V(H) \\ &= \frac{13}{20} - \frac{1}{4} - \frac{45}{100} \times \left(1 - \frac{5}{9}\right) \\ &= \frac{13}{20} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \\ &= \frac{4}{20} = 0{,}2 \end{aligned}$$
De plus, $\mathbb{P}(J) = 1 - \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(V) = 1 - \dfrac{30}{100} - \dfrac{45}{100} = \dfrac{1}{4}$.
Par suite, $\mathbb{P}_J(H) = \dfrac{\mathbb{P}(J \cap H)}{\mathbb{P}(J)} = 0{,}2 \times 4 = 0{,}8$.

Exercice 2

1. On a $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$.
2. Il faut tout d'abord déterminer le signe de $f'(x)$, qui est une fonction polynomiale de degré 2.
On détermine alors ses racines en calculant le discriminant :
$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 4 + 12 = 16 = 4^2 > 0$.
Il y a donc deux racines : $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2 - 4}{2 \times 3} = \dfrac{-1}{3}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2 + 4}{6} = 1$
Comme $a = 3 > 0$, on a le signe de f' puis les variations de f comme suit :

x	-1		$\frac{-1}{3}$		1		2
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f	-2	↗	$\frac{-22}{27}$	↘	-2	↗	1

3. f étant une fonction polynomiale, elle est continue sur $[1;2]$. De plus, d'après le tableau de variations, f est strictement croissante sur $[1{,}2]$. Enfin, $f(1) = -2$ et $f(2) = 1$. Donc $f(1) \leqslant 0 \leqslant f(2)$.
Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution α de l'équation $f(x) = 0$ sur $[1;2]$.

4. Le tableau de variations nous permet d'affirmer que pour tout x de l'intervalle $[-1;1]$, $f(x)$ est strictement inférieure à 0, donc l'équation $f(x)=0$ n'a pas de solution sur $[-1;1]$. Comme α est l'unique solution de $f(x)=0$ sur $[1;2]$, on en déduit donc que α est l'unique solution de l'équation $f(x)=0$ sur I.
5. La calculatrice nous permet de donner $\alpha \simeq 1{,}839$ à 10^{-3} près.

Exercice 3
La fonction f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x)=5\,\mathrm{e}^x$ et $v(x)=x^2+1$.
Alors $u'(x)=5\,\mathrm{e}^x$ et $v'(x)=2x$.
Par suite, $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.
Alors $f'(x)=\dfrac{5\,\mathrm{e}^x(x^2+1)-5\,\mathrm{e}^x(2x)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{5\,\mathrm{e}^x(x^2-2x+1)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{5\,\mathrm{e}^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$.

Exercice 4
On a :

$$\begin{aligned} e^{-x^2}e^{3x}-1 \leqslant 0 \;&\Leftrightarrow\; e^{-x^2}e^{3x} \leqslant 1 \\ &\Leftrightarrow\; e^{-x^2+3x} \leqslant e^0 \\ &\Leftrightarrow\; -x^2+3x \leqslant 0 \\ &\Leftrightarrow\; -x(x-3) \leqslant 0 \end{aligned}$$

L'expression $-x^2+3x$ est polynomiale de second degré avec $a=-1<0$ et a pour racines 0 et 3.
L'expression est donc négative à l'extérieur des racines.
Ainsi, $\mathcal{S}=]-\infty;0]\cup[3;+\infty[$.