LYCÉE ALFRED KASTLER **TS**

2017–2018

Devoir surveillé n°3 – mathématiques

22/11/2017

Exercice 1 (5 points - Antilles-Guyane 16 juin 2017)

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct. On considère l'équation

$$(E) : z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0$$

ayant pour inconnue le nombre complexe z.

1. Donner une solution entière de (E).
2. Démontrer que, pour tout nombre complexe z,
$$z^4 + 2z^3 - z - 2 = \left(z^2 + z - 2\right)\left(z^2 + z + 1\right).$$
3. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

Exercice 2 (5 points - Pondichéry 26 avril 2017)

1. On considère l'équation $(E) : z^2 - 6z + c = 0$
   où c est un réel strictement supérieur à 9.
   (a) Justifier que (E) admet deux solutions complexes non réelles.
   (b) Justifier que les solutions de (E) sont $z_{\text{A}} = 3 + \mathrm{i}\sqrt{c-9}$ et $z_{\text{B}} = 3 - \mathrm{i}\sqrt{c-9}$.
2. On note A et B les points d'affixes respectives z_{A} et z_{B}.
   Justifier que le triangle OAB est isocèle en O.

Exercice 3 (10 points - Asie 22 juin 2017)

Partie A

On considère la fonction C définie sur $[0;+\infty[$ par : $C(t) = 12\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t}\right)$.

1. Étudier le sens de variation de la fonction C sur $[0;+\infty[$.
2. Montrer que quelque soit $t \in [0;+\infty[$, $C(t) < 15$.

Partie B

1. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{105}{x}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x}\right)$.

   Démontrer que, pour tout réel x de $]0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{105g(x)}{x^2}$,

   où g est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{3x}{40}\mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x} + \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x} - 1$.
2. On donne le tableau de variation de la fonction g :

x	0	$+\infty$
$g(x)$	0 ↘	-1

   En déduire le sens de variation de la fonction f.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 5{,}9$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1;80]$.
   Donner une valeur approchée de cette solution au dixième près.