LYCÉE ALFRED KASTLER **TS**
2017–2018

Devoir surveillé n°3 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. On a $1^4 + 2 \times 1^3 - 1 - 2 = 1 + 2 - 1 - 2 = 0$, donc 1 est solution de (E).
2. Soit $z \in \mathbb{C}$, alors :
$$\left(z^2 + z - 2\right)\left(z^2 + z + 1\right) = z^4 + z^3 + z^2 + z^3 + z^2 + z - 2z^2 - 2z - 2 = z^4 + 2z^3 - z - 2$$
3. D'après la question précédente, l'équation (E) équivaut à
$$z^2 + z - 2 = 0 \text{ ou } z^2 + z + 1 = 0$$
   - l'équation $z^2 + z - 2 = 0$ est du second degré, à coefficients réels, son discriminant vaut $\Delta = ... = 9 > 0$.
   Elle possède donc deux solutions réelles qui sont ... -2 et 1.
   - l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ est du second degré, à coefficients réels, son discriminant vaut $\Delta = ... = -3 < 0$.
   Elle possède donc deux solutions complexes conjuguées qui sont ... $-\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   - L'ensemble de solutions de (E) est donc : $\left\{-2; 1; -\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}; -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

Exercice 2

1. (a) $\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4c < 0$ car $c > 9$ donc (E) admet deux solutions complexes non réelles.

   (b) Les solutions de (E) sont conjuguées de la forme $z_1 = \dfrac{-b + \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \overline{z_1}$

   $z_1 = \dfrac{6 + \mathrm{i}\sqrt{4c - 36}}{2} = \dfrac{6 + 2\mathrm{i}\sqrt{c - 9}}{2} = 3 + \mathrm{i}\sqrt{c - 9} = z_\mathrm{A}$ et $z_2 = \overline{z_1} = \overline{z_\mathrm{A}} = z_\mathrm{B}$
2. On doit calculer OA et OB, sachant que $\mathrm{A}(3; \sqrt{c - 9})$ et $\mathrm{B}(3; -\sqrt{c - 9})$.
Alors $\mathrm{OA} = \sqrt{9 + c - 9} = \sqrt{c}$ et $\mathrm{OB} = ... = \sqrt{c}$.
Ainsi OA = OB, et OAB est bien isocèle en O.

Exercice 3
Partie A

1. La fonction C est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$C'(t) = 12\left(0 - \left(-\dfrac{7}{80}\right)\mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t}\right) = \dfrac{21}{20}\mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t} > 0$ sur $[0; +\infty[$,
donc la fonction C est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
2. On sait qu'une exponentielle est toujours strictement positive, donc $1 - \mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t} < 1$,
puis $C(t) = 12\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t}\right) < 12 < 15$.

Partie B

1. La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables et

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 105\left(-\frac{1}{x^2}\right)\times\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x}\right)+\frac{105}{x}\times\left(0-\left(-\frac{3}{40}\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x}\right)\right)\\
&= \frac{105}{x^2}\left(-1+\mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x}+\frac{3x}{40}\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x}\right)\\
&= \frac{105\,g(x)}{x^2}
\end{aligned}$$

où g est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{3x}{40}\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x}+\mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x}-1$.

2. $f'(x)=\dfrac{105\,g(x)}{x^2}$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.
D'après le tableau de variation de la fonction g, $g(x)<0$ sur $]0;+\infty[$,
donc $f'(x)<0$ sur $]0;+\infty[$ et donc la fonction f est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

3. D'après la question précédente la fonction f est continue car dérivable et elle est strictement décroissante sur $[1;80]$.
De plus, $f(1)=105\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{3}{40}}\right)\simeq 7{,}59$ à $f(80)=\dfrac{105}{80}\left(1-\mathrm{e}^{-6}\right)\simeq 1{,}31$.
Comme $5{,}9\in[1{,}31;7{,}59]$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires il existe un réel unique $\alpha\in[1;80]$, tel que $f(\alpha)=5{,}9$.
La calculatrice donne $\alpha\simeq 8{,}1$.