

Devoir surveillé n°4 – mathématiques  
12/12/2017

**Exercice 1 (20 points – Amérique du Sud, 21 novembre 2017)**

Un biologiste souhaite étudier l'évolution de la population d'une espèce animale dans une réserve. Cette population est estimée à 12 000 individus en 2016. Les contraintes du milieu naturel font que la population ne peut pas dépasser les 60 000 individus.

**Partie A : un premier modèle**

Dans une première approche, le biologiste estime que la population croît de 5 % par an. L'évolution annuelle de la population est ainsi modélisée par une suite  $(v_n)$  où  $v_n$  représente le nombre d'individus, exprimé en milliers, en  $2016 + n$ . On a donc  $v_0 = 12$ .

1. Déterminer la nature de la suite  $(v_n)$  et donner l'expression de  $v_n$  en fonction de  $n$ .
2. Ce modèle répond-il aux contraintes du milieu naturel ?

**Partie B : un second modèle**

Le biologiste modélise ensuite l'évolution annuelle de la population par une suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 12$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = -\frac{1,1}{605}u_n^2 + 1,1u_n$ .

1. On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par
 
$$g(x) = -\frac{1,1}{605}x^2 + 1,1x.$$
  - (a) Justifier que  $g$  est croissante sur  $[0 ; 60]$ .
  - (b) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $g(x) = x$ .
2. On remarquera que  $u_{n+1} = g(u_n)$ .
  - (a) Calculer la valeur arrondie à  $10^{-3}$  de  $u_1$ . Interpréter.
  - (b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 \leq u_n \leq 55$ .
  - (c) Démontrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.
  - (d) En déduire la convergence de la suite  $(u_n)$ .
  - (e) On admet que la limite  $l$  de la suite  $(u_n)$  vérifie  $g(l) = l$ . En déduire sa valeur et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.
3. Le biologiste souhaite déterminer le nombre d'années au bout duquel la population dépassera les 50 000 individus avec ce second modèle. Il utilise l'algorithme suivant.

Variables	$n$ un entier naturel
	$u$ un nombre réel
Traitement	$n$ prend la valeur 0 $u$ prend la valeur 12 <b>Tant Que</b> ..... $u$ prend la valeur ..... $n$ prend la valeur ..... <b>Fin Tant Que</b>
Sortie	Afficher .....

Recopier et compléter cet algorithme afin qu'il affiche en sortie le plus petit entier  $r$  tel que  $u_r \geq 50$ .