LYCÉE ALFRED KASTLER **TS**
2017–2018

Devoir surveillé n°4 – mathématiques
Correction

Exercice 1
Partie A

1. Augmenter de 5 %, c'est multiplier par $1+\dfrac{5}{100}=1{,}05$; la suite (v_n) est donc géométrique de premier terme $v_0=12$ et de raison $q=1{,}05$.
   Donc, pour tout n, on a : $v_n=v_0\times q^n=12\times 1{,}05^n$.
2. Il faut regarder si ce modèle permet de limiter la population à 60 000 individus, autrement dit si (v_n) est majorée par 60.
   Or $q=1{,}05>1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}1{,}05^n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=+\infty$.
   Ainsi (v_n) n'est pas majorée.
   Ce modèle ne répond donc pas aux contraintes du milieu naturel.

Partie B

1. (a) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x)=-\dfrac{1{,}1}{605}\times 2x+1{,}1=-\dfrac{2{,}2}{605}x+1{,}1$.
   $g'(x)>0\Leftrightarrow -\dfrac{2{,}2}{605}x+1{,}1>0\Leftrightarrow 1{,}1>\dfrac{2{,}2}{605}x\Leftrightarrow \dfrac{1{,}1\times 605}{2{,}2}>x\Leftrightarrow x<302{,}5$
   Donc $g'(x)>0$ sur $[0;60]$ donc g est croissante sur $[0;60]$.

   (b) On résout dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x)=x$:
   $$g(x)=x\Leftrightarrow -\frac{1{,}1}{605}x^2+1{,}1x=x\Leftrightarrow -\frac{1{,}1}{605}x^2+0{,}1x=0\Leftrightarrow x\left(-\frac{1{,}1}{605}x+0{,}1\right)=0$$
   $$\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } -\frac{1{,}1}{605}x+0{,}1=0\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } 0{,}1=\frac{1{,}1}{605}x\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } 0{,}1\times\frac{605}{1{,}1}=x$$
   $$\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=55$$

2. (a) $u_1=g(u_0)=g(12)\simeq 12{,}938$
   Avec ce modèle, on peut estimer la population à 12 938 individus en 2017.

   (b) Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété $0\leqslant u_n\leqslant 55$.

   Initialisation

   Pour $n=0$, $u_0=12$ et $0\leqslant 12\leqslant 55$ donc la propriété est vraie au rang 0.

   Hérédité

   On suppose que le propriété est vraie au rang $n\geqslant 0$, c'est-à-dire que $0\leqslant u_n\leqslant 55$; c'est l'hypothèse de récurrence.
   Or $0\in[0\ ;\ 60]$ et $55\in[0\ ;\ 60]$; de plus on sait que le fonction g est croissante sur $[0\ ;\ 60]$ donc de $0\leqslant u_n\leqslant 55$, on peut déduire que $g(0)\leqslant g(u_n)\leqslant g(55)$.
   Les nombres 0 et 55 sont solutions de l'équation $g(x)=x$ donc $g(0)=0$ et $g(55)=55$; de plus, $g(u_n)=u_{n+1}$.
   Donc $g(0)\leqslant g(u_n)\leqslant g(55)$ équivaut à $0\leqslant u_{n+1}\leqslant 55$ et on a donc démontré que la propriété était vraie au rang $n+1$.

   Conclusion

   La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire pour tout $n\geqslant 0$; d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n\geqslant 0$.

   On a donc démontré par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0\leqslant u_n\leqslant 55$.

(c) Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1{,}1}{605}u_n^2 + 1{,}1u_n - u_n = -\dfrac{1{,}1}{605}u_n^2 + 0{,}1u_n = u_n\left(-\dfrac{1{,}1}{605}u_n + 0{,}1\right)$

$$= u_n \times \frac{1{,}1}{605}\left(-u_n + 0{,}1 \times \frac{605}{1{,}1}\right) = \frac{1{,}1}{605}u_n\,(55 - u_n)$$

On sait que $0 \leqslant u_n \leqslant 55$ donc $55 - u_n \geqslant 0$ donc $\dfrac{1{,}1}{605}u_n\,(55 - u_n) \geqslant 0$.

On a donc démontré que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ pour tout n donc la suite (u_n) est croissante.

(d) La suite (u_n) est croissante et majorée par 55 donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.

(e) On admet que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $g(\ell) = \ell$ donc elle est solution de l'équation $g(x) = x$.

L'équation $g(x) = x$ n'admet que 2 solutions : 0 et 55.

La suite (u_n) est croissante et $u_0 = 12$ donc la limite ℓ de la suite est supérieure ou égale à 12.

On en déduit donc que $\ell = 55$ ce qui signifie que, selon ce modèle, la population va tendre vers 55 000 individus.

3. Voici l'algorithme complété :

Variables	n un entier naturel
	u un nombre réel
Traitement	n prend la valeur 0 u prend la valeur 12 **Tant Que** $u < 50$ u prend la valeur $1{,}1u - \dfrac{1{,}1}{605}u^2$ n prend la valeur $n + 1$ **Fin Tant Que**
Sortie	Afficher n

Avec les nouvelles notations simplifiées, l'algorithme devient :

$n \leftarrow 0$
$u \leftarrow 12$
Tant que $u < 50$ Faire
  $u \leftarrow 1{,}1u - \dfrac{1{,}1}{605}u^2$
  $n \leftarrow n + 1$
Fin Tant que
Afficher n