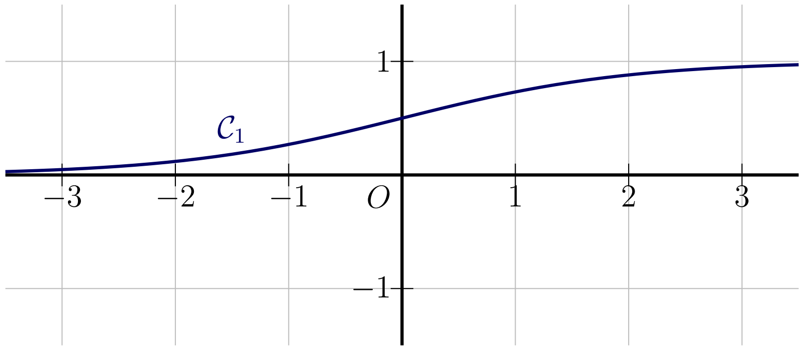
Devoir surveillé n°5 – mathématiques
31/01/2018
L'énoncé est à rendre avec la copie

Exercice 1 (5 points – Restitution organisée des connaissances)
Démontrer les propriétés suivantes du cours :

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$$

Exercice 2 (15 points)
Étant donné un nombre réel k, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-kx}}$.

Partie A
Dans cette partie on choisit $k = 1$. On a donc, pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.
On donne ci-dessous la représentation graphique $\mathcal{C}_1$ de la fonction f_1 dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



1. Déterminer les limites de $f_1(x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$ et interpréter graphiquement les résultats obtenus.
2. Démontrer que, pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$.
3. On appelle f_1' la fonction dérivée de f_1 sur $\mathbb{R}$. Calculer, pour tout réel x, $f_1'(x)$.
   En déduire les variations de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.

Partie B
Dans cette partie, on choisit $k = -1$ et on souhaite tracer la courbe $\mathcal{C}_{-1}$ représentant la fonction f_{-1}.
Pour tout réel x, on appelle P le point de $\mathcal{C}_1$ d'abscisse x et M le point de $\mathcal{C}_{-1}$ d'abscisse x.
On note K le milieu du segment $[MP]$.

1. Montrer que, pour tout réel x, $f_1(x) + f_{-1}(x) = 1$.
2. En déduire que le point K appartient à la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.
3. Tracer la courbe $\mathcal{C}_{-1}$ sur la figure ci-dessus (l'énoncé est à rendre avec la copie).

Partie C
Dans cette partie, on ne privilégie pas de valeur particulière du paramètre k.
Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Quelle que soit la valeur du nombre réel k, la représentation graphique de la fonction f_k est strictement comprise entre les droites d'équations $y = 0$ et $y = 1$.
2. Quelle que soit la valeur du réel k, la fonction f_k est strictement croissante.
3. Pour tout réel $k \geqslant 10$, $f_k\left(\dfrac{1}{2}\right) \geqslant 0{,}99$.