Devoir surveillé n°5 – mathématiques
Correction

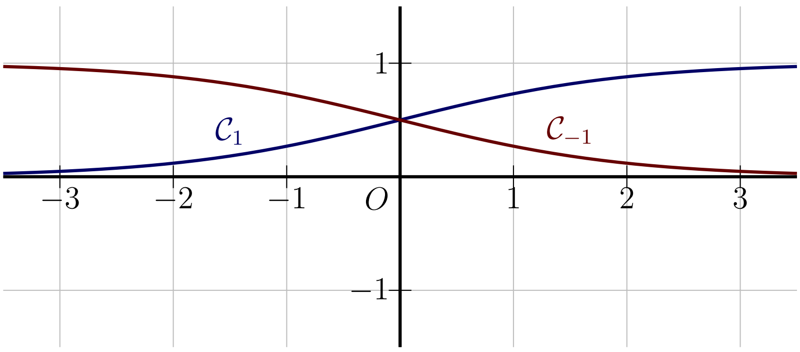
Exercice 1
Voir le cours.

Exercice 2
Partie A

1. Puisque $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, il vient, $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f_1(x) = 1$
   Puisque $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$, il vient, $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f_1(x) = 0$
   Graphiquement cela signifie que les droites d'équation $y = 0$ et $y = 1$ sont deux asymptotes horizontales à $\mathcal{C}_1$ au voisinage respectivement de moins et plus l'infini.
2. $f_1(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x \times 1}{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^{-x})} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$
3. f_1 est de la forme $\dfrac{1}{u}$ avec $u(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x}$. Alors $f_1{}' = -\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$. Ainsi,
   $f_1{}' = -\dfrac{-\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}$.
   Cette expression étant toujours strictement positive sur $\mathbb{R}$, il en résulte que la fonction f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Partie B

1. $f_1(x) + f_{-1}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1} + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1} = \dfrac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x+1} = 1$
2. Comme $P\,(x\ ;\ f_1(x))$ et $M\,(x\ ;\ f_{-1}(x))$ et comme K est le milieu de $[MP]$,
   $y_K = \dfrac{y_M + y_P}{2} = \dfrac{f_1(x) + f_{-1}(x)}{2} = \dfrac{1}{2}$
   Le point K est donc un point de la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.
3. Il résulte de la question précédente que les deux courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.



Partie C

1. **Vrai** : Quel que soit $k \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-kx} > 0 \Rightarrow 1 + \mathrm{e}^{-kx} > 1 \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-kx}} < 1$.
2. **Faux** : On a vu que la fonction f_{-1} est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3. **Vrai** : Car si $k \geqslant 10$ alors $-\dfrac{1}{2}k \leqslant -5$ puis $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}k} \leqslant \mathrm{e}^{-5}$ par croissance de la fonction exponentielle et enfin $1+\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}k} \leqslant 1+\mathrm{e}^{-5}$.
Finalement :

$$0{,}99 < 0{,}993\,3 \leqslant \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-5}} \leqslant \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}k}} = f_k\left(\frac{1}{2}\right)$$