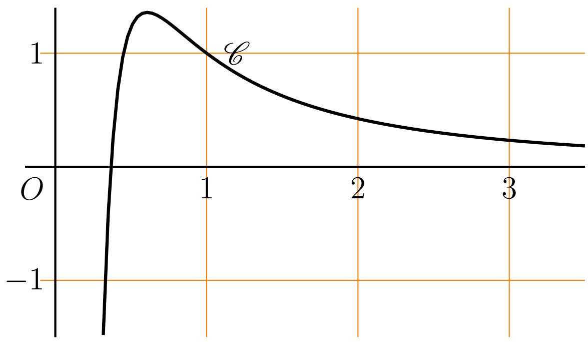
Devoir surveillé n°6 – mathématiques
21/01/2018

Exercice 1 (3 points)
Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.
Soit g la fonction définie sur $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ par $g(x) = 2x\ln(2x+1)$.
Proposition 1 Sur $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$, l'équation $g(x) = 2x$ a une unique solution : $\dfrac{\mathrm{e}-1}{2}$.
Proposition 2 Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$ est : $1 + \ln 4$.

Exercice 2 (17 points)
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{x^2}$.
Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan, donnée ci-dessous :



1. (a) Étudier la limite de f en 0.
   (b) Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.
   (c) En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathscr{C}$.
2. (a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$,
   $$f'(x) = \frac{-1-2\ln(x)}{x^3}.$$
   (b) Résoudre sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ l'inéquation $-1-2\ln(x) > 0$.
   En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   (c) Dresser le tableau des variations de la fonction f.
3. (a) Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.
   (b) En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.