LYCÉE ALFRED KASTLER **TS**
2017–2018

Devoir surveillé n°6 – mathématiques
Correction

Exercice 1
Proposition 1 : Fausse.
En effet, $x = 0$ est solution (évidente) de l'équation $g(x) = 2x \Leftrightarrow 2x\ln(2x+1) = 2x$.
$\dfrac{\mathrm{e}-1}{2}$ n'est donc pas l'unique solution.
Proposition 2 : Vraie.
Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$ est $g'\left(\dfrac{1}{2}\right)$.
Or $g'(x) = 2\ln(2x+1) + 2x \times \dfrac{2}{2x+1}$ (application de $(uv)' = u'v + uv'$ et $(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$).
Alors $g'(\frac{1}{2}) = \cdots = 2\ln(2) + \dfrac{2}{2} = \ln(2^2) + 1 = 1 + \ln(4)$.

Exercice 2

1. (a) Étudions la limite de f en 0.
   On sait que $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} 1 + \ln(x) = -\infty$.
   D'autre part $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$, alors par produit des limites, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$

   (b) On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$. D'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, alors par produit des limites $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$.
   On a aussi $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$, et en ajoutant ces deux dernières limites, on obtient :
   $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (car $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} \times \dfrac{\ln(x)}{x}$).

   (c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ prouve que l'axe des ordonnées est asymptote verticale.
   $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ que l'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$.

2. (a)
$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - (1+\ln x)}{x^4} = \frac{-x - 2x\ln x}{x^4} = \frac{-1 - 2\ln(x)}{x^3}.$$

   (b) $-1 - 2\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x < \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.
   $\mathcal{S} =]0; \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}[$.
   Pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$, $x^3 > 0$ et $f'(x)$ est du signe de $-1 - 2\ln(x)$.
   Ainsi, le signe est celui donné à la question suivante.

   (c) On a $f\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1 - \frac{1}{2}}{\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)^2} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\mathrm{e}^{-1}} = \dfrac{\mathrm{e}}{2}$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
variations de f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{\mathrm{e}}{2}$	$\searrow$	0

3. (a) On a : $f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{-1}$

   Ce qui prouve que la courbe $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en un unique point, le point de coordonnées $(\mathrm{e}^{-1}\ ;\ 0)$

   (b) D'après le tableau des variations de f et sachant que $f\left(\mathrm{e}^{-1}\right) = 0$.

   On en déduit que $f(x) > 0$ sur l'intervalle $]\mathrm{e}^{-1}\ ;\ +\infty[$ et $f(x) < 0$ sur l'intervalle $]0\ ;\ \mathrm{e}^{-1}[$.