ÉPREUVE DE BAC BLANC
Mercredi 14 mars 2018

MATHÉMATIQUES

Série S
OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient 4

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

Exercice 1 (5 points)

Pour chacune des trois propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. Il est attribué **un point par réponse exacte correctement justifiée**. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

1. On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
   Soit (E) l'équation $(z-1)\left(z^2 - 8z + 25\right) = 0$ où z appartient à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
   Affirmation 1 : Les points du plan dont les affixes sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E) sont les sommets d'un triangle rectangle.
2. **Affirmation 2 :**Dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation

$$z - \overline{z} + 2 - 4\text{i} = 0$$

   admet une solution unique.
3. **Affirmation 3 :** $\ln\left(\sqrt{\text{e}^7}\right) + \dfrac{\ln\left(\text{e}^9\right)}{\ln\left(\text{e}^2\right)} = \dfrac{\text{e}^{\ln 2 + \ln 3}}{\text{e}^{\ln 3 - \ln 4}}$
4. **Affirmation 4 :** L'équation $\ln(x-1) - \ln(x+2) = \ln 4$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.
5. **Affirmation 5 :** Lorsqu'en début d'exécution de l'algorithme suivant la valeur de X est 0 et celle de Y est $\dfrac{3}{10}$, la valeur de X à la fin de l'exécution de l'algorithme est 0,54.

```
Tant que Y < 0,5 Faire
  | X ← X + 0,01
  | Y ← 3 / (4 + 6 e^(−2x))
Fin Tant que
```

Exercice 2 (5 points)

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$u(x) = \ln(x) + x - 3.$$

1. Justifier que la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
2. Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3.
3. En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)[\ln(x) - 2] + 2.$$

On appelle C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0.
2. (a) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{u(x)}{x^2}$ où u est la fonction définie dans la partie A.
   (b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Exercice 3 (5 points)
On étudie un modèle de propagation d'un virus dans une population, semaine après semaine. Chaque individu de la population peut être, à l'exclusion de toute autre possibilité :

1. soit susceptible d'être atteint par le virus, on dira qu'il est « de type S » ;
2. soit malade (atteint par le virus) ;
3. soit immunisé (ne peut plus être atteint par le virus).

Un individu est immunisé lorsqu'il a été vacciné, ou lorsqu'il a guéri après avoir été atteint par le virus.
Pour tout entier naturel n, le modèle de propagation du virus est défini par les règles suivantes :

1. Parmi les individus de type S en semaine n, on observe qu'en semaine $n+1$: 85 % restent de type S, 5 % deviennent malades et 10 % deviennent immunisés ;
2. Parmi les individus malades en semaine n, on observe qu'en semaine $n+1$: 65 % restent malades, et 35 % sont guéris et deviennent immunisés.
3. Tout individu immunisé en semaine n reste immunisé en semaine $n+1$.

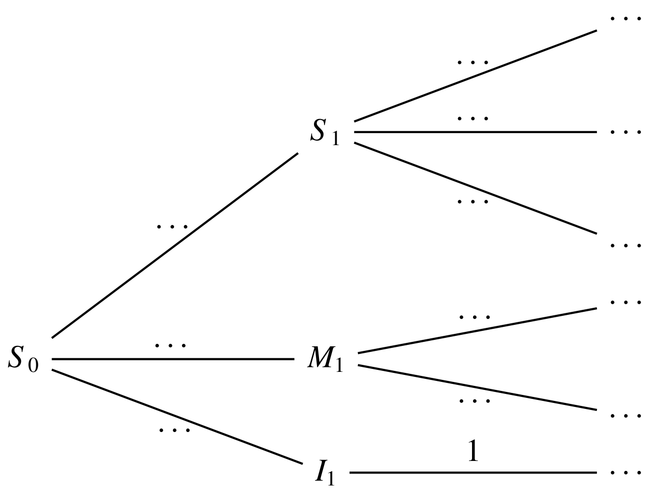
On choisit au hasard un individu dans la population. On considère les évènements suivants :
S_n : « l'individu est de type S en semaine n » ;
M_n : « l'individu est malade en semaine n » ;
I_n : « l'individu est immunisé en semaine n ».
En semaine 0, tous les individus sont considérés « de type S », on a donc les probabilités suivantes :

$$P(S_0) = 1 \ ; \ P(M_0) = 0 \text{ et } P(I_0) = 0.$$

Partie A

On étudie l'évolution de l'épidémie au cours des semaines 1 et 2.

1. Reproduire sur la copie et compléter l'arbre de probabilités donné ci-dessous :



2. Montrer que $P(I_2) = 0{,}202\,5$.
3. Sachant qu'un individu est immunisé en semaine 2, quelle est la probabilité, arrondie au millième, qu'il ait été malade en semaine 1 ?

PARTIE B

On étudie à long terme l'évolution de la maladie.
Pour tout entier naturel n, on : $u_n = P(S_n)$, $v_n = p(M_n)$ et $w_n = P(I_n)$ les probabilités respectives des évènements S_n, M_n et I_n.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n + v_n + w_n = 1$.
   On admet que la suite (v_n) est définie par $v_{n+1} = 0{,}65v_n + 0{,}05u_n$.
2. À l'aide d'un tableur, on a calculé les premiers termes des suites (u_n), (v_n) et (w_n).

	A	B	C	D
1	n	u_n	v_n	w_n
2	0	1	0	0
3	1	0,850 0	0,050 0	0,100 0
4	2	0,722 5	0,075 0	0,202 5
5	3	0,614 1	0,084 9	0,301 0
6	4	0,522 0	0,085 9	0,392 1
7	5	0,443 7	0,081 9	0,474 4
8	6	0,377 1	0,075 4	0,547 4
...	...	...	...	...
20	18	0,053 6	0,013 3	0,933 0
21	19	0,045 6	0,011 3	0,943 1
22	20	0,038 8	0,009 6	0,951 6

   *Pour répondre aux questions **a.** et **b.** suivantes, on utilisera la feuille de calcul reproduite ci-dessus.*

   (a) Quelle formule, saisie dans la cellule C3, permet par recopie vers le bas, de calculer les termes de la suite (v_n) ?

   (b) On admet que les termes de (v_n) augmentent, puis diminuent à partir d'une certain rang N, appelé le « pic épidémique » : c'est l'indice de la semaine pendant laquelle la probabilité d'être malade pour un individu choisi au hasard est la plus grande.
   Déterminer la valeur du pic épidémique prévue par ce modèle.

3. (a) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0{,}85u_n$.
   En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

   (b) Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n,

$$v_n = \frac{1}{4}\left(0{,}85^n - 0{,}65^n\right).$$

4. Calculer les limites de chacune des suites (u_n), (v_n) et (w_n).
   Que peut-on en déduire quant à l'évolution de l'épidémie prévue à long terme par ce modèle ?

Exercice 4 (5 points)

Pour tout réel k strictement positif, on désigne par f_k la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que :

$$f_k(x) = kx\mathrm{e}^{-kx}.$$

On note C_k sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A : Étude du cas $k = 1$

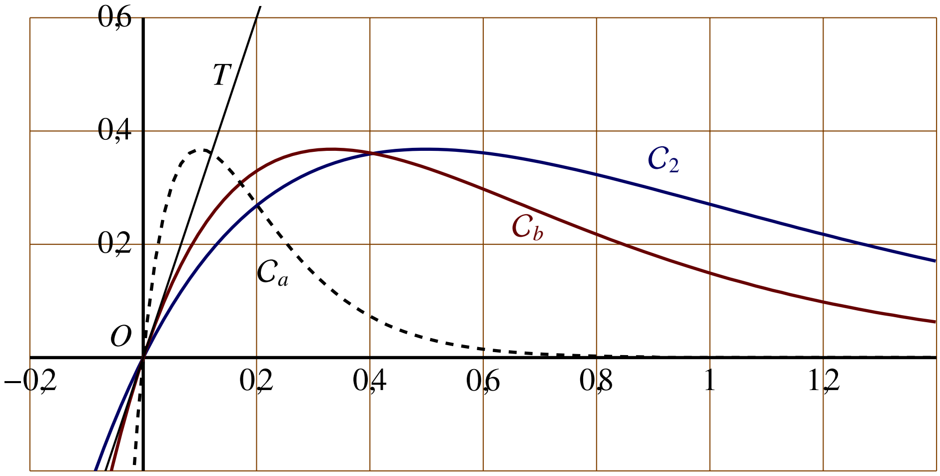
On considère donc la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_1(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Déterminer les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire que la courbe C_1 admet une asymptote que l'on précisera.
2. Étudier les variations de f_1 sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

Partie B : Propriétés graphiques

On a représenté sur le graphique ci-dessous les courbes C_2, C_a et C_b où a et b sont des réels strictement positifs fixés et T la tangente à C_b au point O origine du repère.



1. Montrer que pour tout réel k strictement positif, les courbes C_k passent par un même point.
2. (a) Montrer que pour tout réel k strictement positif et tout réel x on a

$$f'_k(x) = k(1 - kx)\mathrm{e}^{-kx}.$$

   (b) Justifier que, pour tout réel k strictement positif, f_k admet un maximum et calculer ce maximum.

   (c) En observant le graphique ci-dessus, comparer a et 2. Expliquer la démarche.

   (d) Écrire une équation de la tangente à C_k au point O origine du repère.

   (e) En déduire à l'aide du graphique une valeur approchée de b.