Bac blanc – mathématiques
Correction

Exercice 1
Affirmation 1 : Vraie.

- L'équation $z-1=0$ a pour solution le nombre $a=1$ affixe d'un point appelé A.
- On résout dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-8z+25=0$; $\Delta=64-100=-36$ donc cette équation admet deux solutions complexes conjuguées $b=\dfrac{8+6i}{2}=4+3i$ et $c=4-3i$.
  Ces deux nombres complexes b et c sont les affixes de deux points qu'on appelle B et C.
- L'équation (E) a donc trois solutions qui sont les affixes des trois points A, B et C.
- $\text{AB}^2=|b-a|^2=|4+3i-1|^2=|3+3i|^2=9+9=18$
  $\text{AC}^2=|c-a|^2=|4-3i-1|^2=|3-3i|^2=9+9=18$
  $\text{BC}^2=|c-b|^2=|4-3i-4-3i|^2=|-6i|^2=36$
- $18+18=36$ donc $\text{AB}^2+\text{AC}^2=\text{BC}^2$ donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

Affirmation 2 : fausse
On écrit z sous la forme $a+ib$ où a et b sont des réels et on résout l'équation (E) : $z-\overline{z}+2-4i=0$
(E) $\iff a+ib-(\overline{a+ib})+2-4i=0 \iff a+ib-(a-ib)+2-4i=0$
$\iff a+ib-a+ib+2-4i=0 \iff 2ib+2-4i=0 \iff (2b-4)i=-2$ ce qui est impossible.
Affirmation 3 : vraie
$\ln\left(\sqrt{\text{e}^7}\right)=\dfrac{1}{2}\ln\left(\text{e}^7\right)=\dfrac{7}{2}$; $\ln\left(\text{e}^9\right)=9$ et $\ln\left(\text{e}^2\right)=2$ donc $\dfrac{\ln\left(\text{e}^9\right)}{\ln\left(\text{e}^2\right)}=\dfrac{9}{2}$
Donc $\ln\left(\sqrt{\text{e}^7}\right)+\dfrac{\ln\left(\text{e}^9\right)}{\ln\left(\text{e}^2\right)}=\dfrac{7}{2}+\dfrac{9}{2}=\dfrac{16}{2}=8$
$\ln 2+\ln 3=\ln(2\times 3)=\ln 6$ donc $\text{e}^{\ln 2+\ln 3}=\text{e}^{\ln 6}=6$; $\ln 3-\ln 4=\ln\dfrac{3}{4}$ donc $\text{e}^{\ln 3-\ln 4}=\text{e}^{\ln\frac{3}{4}}=\dfrac{3}{4}$
Donc $\dfrac{\text{e}^{\ln 2+\ln 3}}{\text{e}^{\ln 3-\ln 4}}=\dfrac{6}{\frac{3}{4}}=6\times\dfrac{4}{3}=8$
Affirmation 4 : fausse
L'expression $\ln(x-1)-\ln(x+2)$ n'existe que si $x-1>0$ et $x+2>0$ donc on va résoudre l'équation $\ln(x-1)-\ln(x+2)=\ln 4$ dans l'intervalle $I=]1\,;+\infty[$.
$\ln(x-1)-\ln(x+2)=\ln 4 \iff \ln\dfrac{x-1}{x+2}=\ln 4 \iff \dfrac{x-1}{x+2}=4 \iff \dfrac{x-1-4(x+2)}{x+2}=0$
$\iff \dfrac{x-1-4x-8}{x+2}=0 \iff \dfrac{-3x-9}{x+2}=0 \iff x=-3$ et $x\neq -2$
Mais $-3\notin I$ donc l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
Affirmation 5 : fausse
Si on demande à la calculatrice de donner les valeurs de $f(x)$ avec x qui varie à partir de 0 et avec un pas de 0,01, on constate que $f(0{,}54)\simeq 0{,}496\,9<0{,}5$ mais $f(0{,}55)\simeq 0{,}500\,2>0{,}5$.
On sort de la boucle dès que Y donc $f(x)$ est strictement plus grand que 0,5.
Alors la valeur de sortie est 0,55.

Exercice 2
Partie A

1. La fonction est la somme des fonctions $x\mapsto\ln(x)$ et $x\mapsto x-3$, toutes deux strictement croissantes sur $]0;+\infty[$, elle est donc strictement croissante sur cet intervalle.

Remarque On pouvait également dériver la fonction u et constater que la dérivée est strictement positive sur l'intervalle considéré.

2. Remarquons que la fonction ln conserve les inégalités strictes puisqu'elle est strictement croissante.
   Calculons $u(2) = \ln(2) - 1$ or $\ln(2) < \ln(\mathrm{e}) = 1$ car $\mathrm{e} > 2$. On prouve ainsi que $u(2) < 0$.
   D'autre part, $u(3) = \ln(3)$ or $\ln(3) > \ln(1) = 0$ car $3 > 1$, ce qui montre que $u(3) > 0$.
   Notons également que u est continue comme somme de fonctions continues.
   Nous sommes donc dans les conditions d'application du théorème des valeurs intermédiaires.
   0 possède ainsi un antécédent par u dans l'intervalle $[2; 3]$. Comme u est strictement monotone sur $]0; +\infty[$, cet antécédent α est unique sur $]0; +\infty[$.
3. Compte-tenu du sens de variation de u, on a :

x	0		α		$+\infty$
$u(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	

Partie B

1. Nous savons que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$.
   Par opérations sur les limites, on en déduit que : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$
2. (a) f est dérivable sur $]0;\ +\infty[$ comme sommes et produits de fonctions dérivables sur $]0;\ +\infty[$.
   Pour tout $x > 0$:

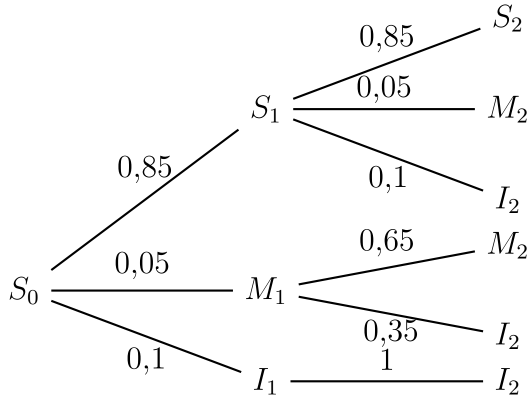
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^2}(\ln(x) - 2) + \left(1 - \frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}. \text{ En réduisant au dénominateur } x^2 : \\ &= \frac{1}{x^2}(\ln(x) - 2 + x - 1) \\ &= \frac{1}{x^2}(\ln(x) + x - 3) \\ &= \frac{1}{x^2}u(x) \end{aligned}$$

   (b) Pour tout $x > 0$, $x^2 > 0$. Ainsi le signe de f' est celui de u. On en déduit que f est strictement décroissante sur $]0; \alpha]$ et strictement croissante sur $]\alpha; +\infty]$.

Exercice 3

Partie A

1. L'arbre de probabilités est le suivant :



2. $I_2 = (S_1 \cap I_2) \cup (M_1 \cap I_2) \cup (I_1 \cap I_2)$ (réunion d'évènements incompatibles).
   D'où : $P(I_2) = P_{S_1}(I_2) \times P(S_1) + P_{M_1}(I_2) \times P(M_1) + P_{I_1}(I_2) \times P(I_1)$ (formule des probabilités totales).
   Donc : $P(I_2) = 0{,}1 \times 0{,}85 + 0{,}35 \times 0{,}05 + 1 \times 0{,}1 = 0{,}085 + 0{,}017\,5 + 0{,}1 = 0{,}202\,5$.
3. $P_{I_2}(M_1) = \dfrac{p(M_1 \cap I_2)}{P(I_2)} = \dfrac{0{,}05 \times 0{,}35}{0{,}202\,5} = \dfrac{0{,}001\,75}{0{,}2025} \simeq 0{,}086$.

PARTIE B

On étudie à long terme l'évolution de la maladie.
Pour tout entier naturel n, on : $u_n = P(S_n)$, $v_n = p(M_n)$ et $w_n = P(I_n)$ les probabilités respectives des évènements S_n, M_n et I_n.

1. L'univers Ω est la réunion des évènements disjoints S_n, M_n et I_n
   donc $u_n + v_n + w_n = P(\Omega) = 1$.
   On admet que la suite (v_n) est définie par $v_0 = 0{,}65 v_n + 0{,}05 u_n$.
2. (a) Dans la cellule C3, il faut taper la formule

   =0,65*C2+0,05*B2

   (b) On voit que la valeur maximale de v_n est obtenue pour $n = 4$ et vaut environ $0{,}085\,9$.
3. (a) D'après l'énoncé, $P(S_{n+1}) = 0{,}85 P(S_n)$ dnonc $u_{n+1} = 0{,}85 u_n$.
   La suite (u_n) est géométrique de raison $q = 0{,}85$.
   On en déduit que pour tout n, $u_n = u_0 q^n$ donc $u_n = 0{,}85^n$.

   (b) Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n,

$$v_n = \frac{1}{4}\left(0{,}85^n - 0{,}65^n\right).$$

   Initialisation : $0{,}85^0 - 0{,}65^0 = 1 - 1 = 0 = v_0$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

   Hérédité : on suppose la propriété vraie pour un entier n quelconque, donc $v_n = 0{,}85^n - 0{,}65^n$.
   Alors :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= 0{,}05 u_n + 0{,}65 v_n \\
&= 0{,}05 \times 0{,}85^n + 0{,}65 \times \frac{1}{4}\left(0{,}85^n - 0{,}65^n\right) \\
&= \left(0{,}05 + \frac{0{,}65}{4}\right) \times 0{,}85^n - \frac{1}{4} \times 0{,}65^{n+1} \\
&= \frac{0{,}85}{4} \times 0{,}85^{n+1} - \frac{0{,}65^{n+1}}{4} \\
&= \frac{1}{4}\left(0{,}85^{n+1} - 0{,}65^{n+1}\right)
\end{aligned}$$

   La propriété est donc héréditaire.

   D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout n.
4. $-1 < 0{,}65 < 1$ et $-1 < 0{,}85 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}85^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}65^n = 0$.
   On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.
   Comme $u_n + v_n + w_n = 1$, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 1$.
   Interprétation : cela signifie donc que sur le long terme, selon ce modèle, tous les individus seront immunisés.

Exercice 4

Partie A : Étude du cas $k = 1$

1. Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} f_1(x) = -\infty$.

   $f_1(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$. On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = 0$.
   Donc l'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_1$ en $+\infty$.

2. f_1 produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$:
   $f_1'(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(1 - x)$.
   Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$ sur $\mathbb{R}$, le signe de $f_1'(x)$ est celui de $1 - x$.
   Donc $f_1'(x) > 0$ si $x < 1$ et $f_1'(x) < 0$ si $x > 1$. D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de ${f_1}'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de f_1	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

Partie B : Propriétés graphiques

1. De façon évidente $f_k(0) = k \times 0 \times \mathrm{e}^0 = 0$, donc les courbes $\mathcal{C}_k$ passent par l'origine.
2. (a) Produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction f_k l'est aussi et :
   $f_k'(x) = k\mathrm{e}^{-kx} - k \times kx\mathrm{e}^{-kx} = k\mathrm{e}^{-kx}(1 - kx)$.

   (b) k strictement positif, et $\mathrm{e}^{-kx} > 0$, pour tout réel x, donc le signe de la dérivée $f_k'(x)$ est celui de $1 - kx$.
   Or $1 - kx < 0 \iff \dfrac{1}{k} < x$; $1 - kx > 0 \iff \dfrac{1}{k} > x$; $1 - kx = 0 \iff \dfrac{1}{k} = x$.
   Il en résulte que la fonction f_k est :
   croissante sur $\left]-\infty; \dfrac{1}{k}\right[$, et décroissante sur $\left]\dfrac{1}{k}; +\infty\right[$;
   elle admet donc un maximum en $\dfrac{1}{k}$:
   $f_k\left(\dfrac{1}{k}\right) = k \times \dfrac{1}{k} \times \mathrm{e}^{-k \times \frac{1}{k}} = 1\mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \simeq 0{,}368$.
   Conclusion : toutes les fonctions ont le même maximum e^{-1} pour $x = \dfrac{1}{k}$.

   (c) Le maximum pour $k = 2$ est obtenu pour $x = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$, donc le maximum pour f_a est obtenue pour une valeur $\dfrac{1}{a}$ inférieure à 0,5 donc $a > 2$.
   Note : en fait on peut penser que l'abscisse du minimum est à peu près égale à 0,1, ce qui correspond à $a = 10$.

   (d) Une équation de cette tangente est :
   $y = f_k'(0)(x - 0) + f_k(0) \iff y = k(1 - 0)\mathrm{e}^0 x + 0 \iff y = kx$.

   (e) Le coefficient directeur de la droite (T) est égal à $\dfrac{0{,}6}{0{,}2} = 3$.
   Donc la courbe $\mathcal{C}_b$ correspond à la valeur $b = 3$.