ÉPREUVE DE TYPE BAC
Mercredi 18 avril 2018

MATHÉMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient 4

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

Exercice 1 (5 points)

Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On donne le nombre complexe $\mathrm{j} = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés du nombre j et de mettre en évidence un lien de ce nombre avec les triangles équilatéraux.

Partie A : propriétés du nombre j

1. (a) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation
$$z^2 + z + 1 = 0.$$
   (b) Vérifier que le nombre complexe j est une solution de cette équation.
2. Déterminer le module et un argument du nombre complexe j, puis donner sa forme exponentielle.
3. Démontrer les égalités suivantes :
   (a) $\mathrm{j}^3 = 1$;
   (b) $\mathrm{j}^2 = -1 - \mathrm{j}$.
4. On note P, Q, R les images respectives des nombres complexes 1, j et j^2 dans le plan.
   Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier la réponse.

Partie B

Soit a, b, c trois nombres complexes vérifiant l'égalité $a + \mathrm{j}b + \mathrm{j}^2 c = 0$.

On note A, B, C les images respectives des nombres a, b, c dans le plan.

1. En utilisant la question A - 3. b., démontrer l'égalité : $a - c = \mathrm{j}(c - b)$.
2. En déduire que AC = BC .
3. Démontrer l'égalité : $a - b = \mathrm{j}^2(b - c)$.
4. En déduire que le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 2 (5 points)

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et de 2 pièces A et B ayant chacune un côté pile et un côté face. Un jeu consiste à lancer une ou plusieurs fois le dé.

Après chaque lancer de dé, si l'on obtient 1 ou 2, alors on retourne la pièce A, si l'on obtient 3 ou 4, alors on retourne la pièce B et si l'on obtient 5 ou 6, alors on ne retourne aucune des deux pièces.

Au début du jeu, les 2 pièces sont du côté face.

1. Dans l'algorithme ci-dessous, 0 code le côté face d'une pièce et 1 code le côté pile. Si a code le côté de la pièce A à un instant donné, alors $1 - a$ code le côté de la pièce A après l'avoir retournée.

```
Variables :       a, b, d, s sont des entiers
                  i, n sont des entiers supérieurs ou égaux à 1
Initialisation :  a prend la valeur 0
                  b prend la valeur 0
                  Saisir n
Traitement :      Pour i allant de 1 à n faire
                  | d prend la valeur d'un entier aléatoire compris
                  | entre 1 et 6
                  | Si d ⩽ 2
                  |     | alors a prend la valeur 1 − a
                  |     | sinon Si d ⩽ 4
                  |     |         | alors b prend la valeur 1 − b
                  |     |       FinSi
                  | FinSi
                  | s prend la valeur a + b
                  FinPour
Sortie :          Afficher s
```

(a) On exécute cet algorithme en saisissant $n = 3$ et en supposant que les valeurs aléatoires générées successivement pour d sont 1 ; 6 et 4. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme :

variables	i	d	a	b	s
initialisation	aucune	aucune			aucune
1er passage boucle Pour					
2e passage boucle Pour					
3e passage boucle Pour					

(b) Cet algorithme permet-il de décider si à la fin les deux pièces sont du côté pile ?

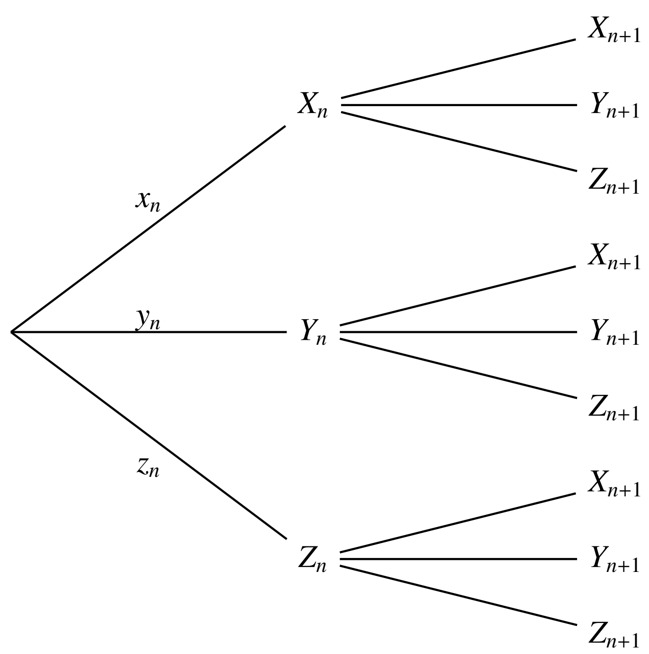
2. Pour tout entier naturel n, on note :
   - X_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté face »
   - Y_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, une pièce est du côté pile et l'autre est du côté face »
   - Z_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté pile ».

   De plus on note, $x_n = P(X_n)$; $y_n = P(Y_n)$ et $z_n = P(Z_n)$ les probabilités respectives des évènements X_n, Y_n et Z_n.

   (a) Donner les probabilités x_0 , y_0 et z_0 respectives qu'au début du jeu il y ait 0, 1 ou 2 pièces du côté pile.

   (b) Justifier que $P_{X_n}(X_{n+1}) = \dfrac{1}{3}$.

   (c) Recopier l'arbre ci-dessous et compléter les probabilités sur ses branches, certaines pouvant être nulles :



   (d) Pour tout entier naturel n, exprimer z_n en fonction de x_n et y_n.

   (e) En déduire que, pour tout entier naturel n, $y_{n+1} = -\dfrac{1}{3}y_n + \dfrac{2}{3}$.

   (f) On pose, pour tout entier naturel n, $b_n = y_n - \dfrac{1}{2}$.

   Montrer que la suite (b_n) est géométrique.

   En déduire que, pour tout entier naturel n, $y_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} \times \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

   (g) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n$.

   Interpréter le résultat.

Exercice 3 (5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soit a un nombre réel strictement positif.

On note Δ_a la droite d'équation $y = ax$ et Γ la courbe représentative de la fonction exponentielle dans le repère orthogonal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Le but de cet exercice est de déterminer le nombre de points d'intersection de Γ et Δ_a suivant les valeurs de a. Pour cela. on considère la fonction f_a définie pour tout nombre réel x par

$$f_a(x) = \mathrm{e}^x - ax.$$

On admet pour tout réel a que la fonction f_a est dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. **Étude du cas particulier** $a = 2$

   La fonction f_2 est donc définie pour tout x réel par $f_2(x) = \mathrm{e}^x - 2x$.

   (a) Étudier les variations de la fonction f_2 sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$ (*on ne demande pas de déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition*.

   (b) En déduire que Γ et Δ_2 n'ont pas de point d'intersection.

2. **Étude du cas général où a est un réel strictement positif**

   (a) Déterminer les limites de la fonction f_a en $+\infty$ et en $-\infty$.

   (b) Étudier les variations de la fonction f_a sur $\mathbb{R}$. Montrer alors que le minimum sur $\mathbb{R}$ de la fonction f_a est $a - a\ln a$.

   (c) Étudier le signe de $a - a\ln a$ suivant les valeurs du nombre réel strictement positif a.

   (d) Déterminer selon les valeurs du réel a le nombre de points communs à Γ et Δ_a.

Exercice 4 (5 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

On considère l'espace muni d'un repère orthonormé.

1. Soit les deux points $A(0\ ;\ -1\ ;\ 1)$ et $B(4\ ;\ -3\ ;\ 0)$.

   On appelle Δ la droite ayant pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t \\ y & = & 3t-1 \\ z & = & -2t+8 \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

   Affirmation 1 : les droites Δ et (AB) sont coplanaires.

2. On considère les deux points $C(7\ ;\ -10\ ;\ 8)$ et $D(1\ ;\ 2\ ;\ 5)$.

   Affirmation 2 : Une représentation paramétrique de la droite (CD) est

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{3}{2}t - 5 \\ y & = & -3t + 14 \\ z & = & -\frac{3}{2}t + 2 \end{array}\right. , t \in \mathbb{R}$$

3. Soit les points :

$$\mathrm{A}(1\ ;\ 2\ ;\ 3), \mathrm{B}(3\ ;\ 0\ ;\ 1), \mathrm{C}(-1\ ;\ 0\ ;\ 1), \mathrm{D}(2\ ;\ 1\ ;\ -1), \mathrm{E}(-1\ ;\ -2\ ;\ 3) \text{ et } \mathrm{F}(-2\ ;\ -3{,}4).$$

   (a) **Affirmation 3 :** Les trois points A, B, et C sont alignés.

   (b) **Affirmation 4 :** les vecteurs $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas coplanaires.

   (c) **Affirmation 5 :** L'intersection entre la droite (EF) et le plan (ABC) est le milieu de $[BC]$.