Type Bac – mathématiques
Correction

Exercice 1
Partie A : propriétés du nombre j

1. (a) On résout l'équation : $z^2+z+1=0$.
$\Delta = \cdots = -3 < 0$ donc cette équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

   (b) $\mathrm{j} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2} = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} = z_1$ donc j est solution de l'équation $z^2+z+1=0$.

2. $|\mathrm{j}|^2 = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} = 1$ donc $|\mathrm{j}| = 1$

   $\mathrm{j} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; on cherche θ tel que $\begin{cases} \cos\theta = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ Donc $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$

   La forme exponentielle de j est donc : $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$.

3. (a) $\mathrm{j}^3 = \left(\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^3 = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi\times 3}{3}} = \mathrm{e}^{i\times 2\pi} = 1$

   (b) j est solution de l'équation $z^2+z+1=0$ donc $\mathrm{j}^2+\mathrm{j}+1=0$ et donc $\mathrm{j}^2 = -1-\mathrm{j}$.

4. P a pour affixe 1 ; Q a pour affixe $\mathrm{j} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$

   et R pour affixe $\mathrm{j}^2 = -1-\mathrm{j} = -1+\dfrac{1}{2} - \dfrac{i\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$.

   Alors :

$$PQ^2 = \left|-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} - 1\right|^2 = \left|-\frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right|^2 = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = 3 \Longrightarrow PQ = \sqrt{3},$$

$$QR^2 = \left|-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right| 2 = \left|-\sqrt{3}\right|^2 = 3 \Longrightarrow QR = \sqrt{3},$$

$$RP^2 = \left|1 + \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right|^2 = \left|\frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right|^2 = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = 3 \Longrightarrow RP = \sqrt{3}$$

   $PQ = QR = RP$ donc le triangle PQR est équilatéral.

Partie B

1. On sait que $a + b\mathrm{j} + c\mathrm{j}^2 = 0$ donc $a = -\mathrm{j}b - \mathrm{j}^2c$.
Or, d'après la question **A. 3. b.**, $\mathrm{j}^2 = -1-\mathrm{j}$, donc :
$a = -\mathrm{j}b - \mathrm{j}^2c = -\mathrm{j}b - (-1-\mathrm{j})c = -\mathrm{j}b + c + \mathrm{j}c \Leftrightarrow a - c = \mathrm{j}(c-b)$

2. $a - c = \mathrm{j}(c-b) \Longrightarrow |a-c| = |\mathrm{j}(c-b)| \Leftrightarrow |a-c| = |\mathrm{j}| \times |c-b|$
On a vu précédemment que $|\mathrm{j}| = 1$; de plus $|a-c| = AC$ et $|c-b| = BC$.
On a donc démontré que $AC = BC$.

3. On sait que $a = -\mathrm{j}b - \mathrm{j}^2c$. On sait aussi que $\mathrm{j}^2 = -1-\mathrm{j}$ donc $\mathrm{j} = -1-\mathrm{j}^2$.
On a donc $a = -(-1-\mathrm{j}^2)b - \mathrm{j}^2c = b + \mathrm{j}^2b - \mathrm{j}^2c$ ce qui équivaut à $a - b = \mathrm{j}^2(b-c)$.

4. On sait que $|\mathrm{j}| = 1$ donc $\left|\mathrm{j}^2\right| = |\mathrm{j}|^2 = 1$. De plus $|a - b| = AB$ et $|b - c| = CB$.
On a vu dans la question précédente que $a - b = \mathrm{j}^2(b - c)$ ce qui entraîne $|a - b| = \left|\mathrm{j}^2(b - c)\right|$ ou encore $|a - b| = \left|\mathrm{j}^2\right| \times |b - c|$. Cette dernière égalité équivaut à $AB = CB$.
Comme $AC = BC$ et $AB = CB$, on a démontré que le triangle ABC était équilatéral.

Exercice 2

1. (a) On exécute cet algorithme en saisissant $n = 3$ et en supposant que les valeurs aléatoires générées successivement pour d sont 1 ; 6 et 4. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme :

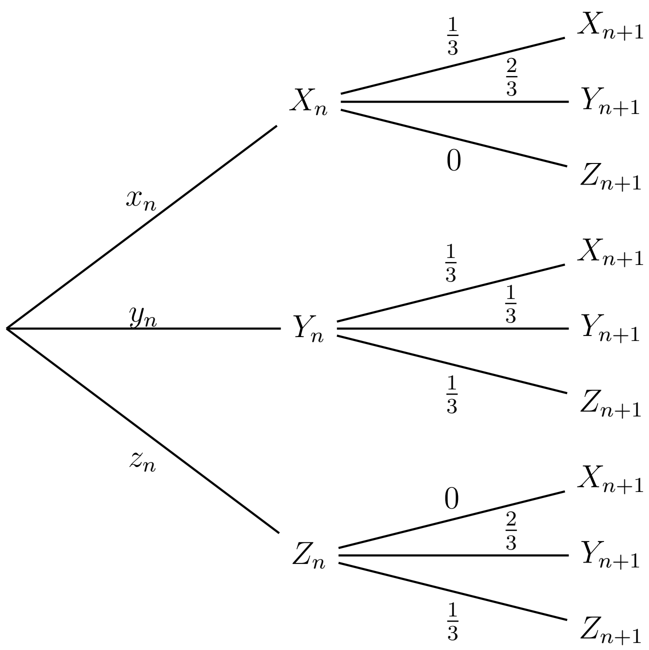
variables	i	d	a	b	s
initialisation	aucune	aucune	0	0	aucune
1^er^ passage boucle Pour	1	1	1	0	1
2^e^ passage boucle Pour	2	6	1	0	1
3^e^ passage boucle Pour	3	4	1	1	2

(b) Cet algorithme permet de décider si à la fin les deux pièces sont du côté pile, puisque c'est le cas si la valeur s affichée est 2.

2. (a) $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ et $z_0 = 0$.

(b) $P_{X_n}(X_{n+1}) = \dfrac{1}{3}$ car si les deux pièces sont du côté face (X_n), pour qu'elles le restent, il faut que le dé tombe sur 5 ou 6. Comme il est équilibré, la probabilité est alors $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

(c) L'arbre est le suivant :



(d) Comme la somme des probabilités des événements X_n, Y_n et Z_n (formant l'ensemble des issues possibles de manière distincte), on a $x_n + y_n + z_n = 1$, donc $z_n = 1 - x_n - y_n$.

(e) D'après l'arbre, on a $y_{n+1} = \dfrac{2}{3}x_n + \dfrac{1}{3}y_n + \dfrac{2}{3}z_n = \dfrac{2}{3}x_n + \dfrac{1}{3}y_n + \dfrac{2}{3}(1 - x_n - y_n) = -\dfrac{1}{3}y_n + \dfrac{2}{3}$

(f) On exprime : $b_{n+1} = y_{n+1} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{3}y_n + \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{3}y_n + \dfrac{1}{6} = -\dfrac{1}{3}\left(y_n - \dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{3}b_n$.

Ainsi b est géométrique de raison $q = -\dfrac{1}{3}$.

Ainsi, $b_n = b_0 \times q^n = \left(y_0 - \dfrac{1}{2}\right)\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n = -\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

Et comme $y_n = b_n + \dfrac{1}{2}$, on en déduit que $y_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} \times \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

(g) Comme $-1 \leqslant q \leqslant$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$. Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} \times 0 = \dfrac{1}{2}$.
Cela signifie qu'au bout d'un certain temps, la probabilité qu'il y a une pièce sur pile et l'autre sur face s'approche de $\dfrac{1}{2}$.

Exercice 3

1. (a) D'après l'énoncé la fonction f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$.
On a $f_2'(x) = \mathrm{e}^x - 2$.
Or $\mathrm{e}^x - 2 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$. Donc :
Donc $\mathrm{e}^x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > \ln 2$: la fonction f est décroissante sur $[-\infty\ ;\ \ln 2[$.
$\mathrm{e}^x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < \ln 2$: la fonction f est croissante sur $[\ln 2\ ;\ +\infty[$.
$f_2(\ln 2) = \mathrm{e}^{\ln 2} - 2 \times \ln 2 = 2 - 2\ln 2$ est le minimum de la fonction f_2 sur $\mathbb{R}$.
On a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f		$\searrow$	$2 - 2\ln 2$	$\nearrow$	

(b) Comme $2 - 2\ln 2 \simeq 0{,}614 > 0$, le minimum de la fonction f_2 étant supérieur à zéro, on en déduit que la fonction est strictement positive sur $\mathbb{R}$, soit
$\mathrm{e}^x - 2x > 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x > 2x$ donc la représentation graphique de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est au dessus de la droite Δ_2.
Γ et Δ_2 n'ont pas de point commun.

2. $f_a(x) = \mathrm{e}^x - ax$

(a)
- limite en plus l'infini :
$f_a(x) = x\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - a\right)$.
On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - a = +\infty$, donc par produit des limites $\lim\limits_{x \to +\infty} f_a(x) = +\infty$.
- limite en moins l'infini :
On sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$. Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f_a(x) = +\infty$.

(b) f_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables et
$f_a'(x) = \mathrm{e}^x - a$.
$\mathrm{e}^x - a = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = a \Leftrightarrow x = \ln a$ (car $a > 0$).
On a le même tableau de variations que pour f_2 en remplaçant 2 par a.

(c) La fonction f_a décroissante, puis croissante admet donc un minimum $f_a(\ln a) = a - a\ln a$.

(d) $a - a\ln a = 0 \Leftrightarrow a(1 - \ln a) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln a = 0$ (car $a \neq 0$) $\Leftrightarrow 1 = \ln a \Leftrightarrow \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}^{\ln a} \Leftrightarrow \mathrm{e} = a$.
On a donc :
- $a - a\ln a > 0 \Leftrightarrow a < \mathrm{e}$: le minimum est positif, donc comme à la question 1, la fonction f_a est strictement positive et la courbe et la droite n'ont pas de point commun.
- $a - a\ln a < 0 \Leftrightarrow a > \mathrm{e}$: le minimum est inférieur à zéro.

x	$-\infty$	$\ln a$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
variations de f		$a - a\ln a$	

Donc sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ \ln a[$, la fonction f_a continue car dérivable et strictement monotone sur cet intervalle passe d'une valeur positive à une valeur négative : il existe donc, d'après le théorème de la valeur intermédiaire un réel $\alpha \in]-\infty\ ;\ \ln a[$ tel que $f_a(\alpha) = 0$, soit $\mathrm{e}^{\alpha} = a\alpha$.

De même sur $]\ln a\ ;\ +\infty[$, la fonction f_a continue car dérivable et strictement monotone sur cet intervalle passe d'une valeur négative à une valeur positive : il existe donc un réel $\beta \in]\ln a\ ;\ +\infty[$ tel que $f_a(\beta) = 0$, soit $\mathrm{e}^{\beta} = a\beta$.

Conclusion : si $a > \mathrm{e}$ la courbe Γ et la droite Δ_a ont deux points communs.

- $a - a\ln a = 0 \Leftrightarrow a = \mathrm{e}$, la fonction $f_a = f_{\mathrm{e}}$ s'annule une seule fois en $x = 1$, donc $f_{\mathrm{e}}(1) = 0$: Γ et Δ_{e} ont un seul point commun (la droite est tangente à la courbe)

Exercice 4

1. L'affirmation est **fausse** :
   - La droite (AB) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}(4;-2;-1)$, et la droite Δ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}(1;3;-2)$. Or $\dfrac{4}{1} \neq -\dfrac{2}{3}$, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u}$ ne sont pas colinéaires, donc (AB) et Δ ne sont pas parallèles.
   - La droite (AB) a pour système paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 4t' \\ y &=& -1-2t' \\ z &=& 1-t' \end{array}\right.$, $t' \in \mathbb{R}$.

   On cherche l'existence d'un point d'intersection $M(x;y;z)$ entre (AB) et Δ. Alors on a :

$$\left\{\begin{array}{lcl} t &=& 4t' \\ 3t-1 &=& -1-2t' \\ -2t+8 &=& 1-t' \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} t &=& 4t' \\ 12t'-1 &=& -1-2t' \\ -8t'+8 &=& 1-t' \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} t &=& 4t' \\ 14t' &=& 0 \\ -7t' &=& -7 \end{array}\right.$$

   On obtient $t' = 0$ et $t' = 1$, ce qui est impossible, donc (AB) et Δ ne sont pas sécantes.

   Les droites (AB) et Δ n'étant ni parallèles ni sécantes, elles ne sont pas coplanaires.

2. L'affirmation est **fausse** :

   La droite dont la représentation paramétrique est donnée dans l'énoncé est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\left(\frac{3}{2};-3;-\frac{3}{2}\right)$. Or $\overrightarrow{CD}(-6;12;-3)$ n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{u}$ (les abscisses et cotes sont opposées dans $\overrightarrow{u}$, ce qui n'est pas le cas dans $\overrightarrow{CD}$).

   Donc le système paramétrique n'est pas celui de la droite (CD).

3. (a) L'affirmation est **fausse** :

   Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont pour coordonnées respectives $(2;-2;-2)$ et $\overrightarrow{AC}(-2;-2;-2)$. Puisque $\dfrac{-2}{2} \neq \dfrac{-2}{-2}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ n'ont pas leurs coordonnées proportionnelles. Les points A,B et C ne sont donc pas alignés.

   (b) L'affirmation est **vraie** :

   On a $\overrightarrow{EF}(-1,-1{,}1)$, $\overrightarrow{AB}(2,-2,-2)$ et $\overrightarrow{AC}(-2;-2;-2)$

   L'équation $a\overrightarrow{EF} + b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$ équivaut au système :

$$\left\{\begin{array}{l} -a+2b-2c=0 \\ -a-2b-2c=0 \\ a-2b-2c=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -a+2b=2c \\ -a=2b+2c \\ a=2b+2c \end{array}\right.$$

On a alors nécessairement $-a = a$, donc $a = 0$. Ensuite, comme $2b = 2c$ et $2b+2c = 4c = 0$, on obtient $c = 0$ puis $b = 0$. Comme $(0; 0; 0)$ est l'unique solution du système, on en déduit que les trois vecteurs sont non coplanaires.

(c) L'affirmation est **vraie** :

D'après la question précédente, on en déduit que la droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants.

Soit I le milieu de $[BC]$. Alors $I(1; 0; 1)$. Ce point appartient nécessairement au plan (ABC). Vérifions que $I \in (EF)$. On a $\overrightarrow{EI}(2; 2; -2)$ et $\overrightarrow{EF}(-1; -1; 1)$. Donc $\overrightarrow{EI} = -2\overrightarrow{EF}$; ainsi $\overrightarrow{EI}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires et les points E, I et F sont alignés.