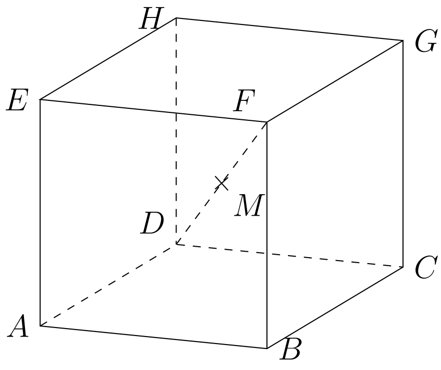
LYCÉE ALFRED KASTLER **TS**

2017–2018

Exercice 1



On considère un cube ABCDEFGH dont la représentation graphique en perspective cavalière est donnée ci-contre.
Les arêtes sont de longueur 1.
L'espace est muni du repère orthonormé $\left(\mathrm{D}; \overrightarrow{\mathrm{DA}}, \overrightarrow{\mathrm{DC}}, \overrightarrow{\mathrm{DH}}\right)$.

Partie A

1. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ est normal au plan (EBG).
2. Déterminer une équation cartésienne du plan (EBG).
3. En déduire les coordonnées du point I intersection de la droite (DF) et du plan (EBG).

   On démontrerait de la même manière que le point J intersection de la droite (DF) et du plan (AHC) a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{1}{3}\right)$.

Partie B

À tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$, on associe le point M du segment [DF] tel que $\overrightarrow{\mathrm{D}M} = x\overrightarrow{\mathrm{DF}}$.
On s'intéresse à l'évolution de la mesure θ en radian de l'angle $\widehat{\mathrm{EMB}}$ lorsque le point M parcourt le segment [DF]. On a $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

1. Que vaut θ si le point M est confondu avec le point D ? avec le point F ?
2. (a) Justifier que les coordonnées du point M sont $(x\ ;\ x\ ;\ x)$.

   (b) Montrer que $\cos(\theta) = \dfrac{3x^2-4x+1}{3x^2-4x+2}$. On pourra pour cela s'intéresser au produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{M\mathrm{E}}$ et $\overrightarrow{M\mathrm{B}}$.
3. On a construit ci-dessous le tableau de variations de la fonction $f\ :\ x \longmapsto \dfrac{3x^2-4x+1}{3x^2-4x+2}$.

x	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
variations de f	$\frac{1}{2}$ ↘	0 ↘	$-\frac{1}{2}$ ↗	0

   Pour quelles positions du point M sur le segment [DF] :

   (a) le triangle MEB est-il rectangle en M ?

   (b) l'angle θ est-il maximal ?

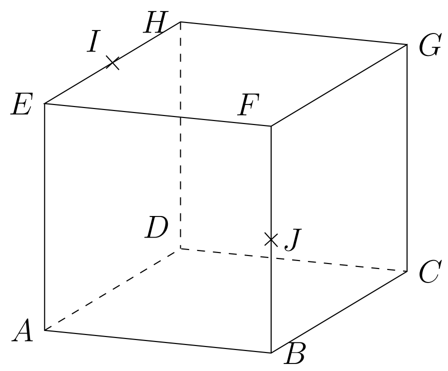
Exercice 2

On considère un cube $ABCDEFGH$ (voir exercice précédent pour une figure).

1. (a) Simplifier le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AE}}$.
   (b) En déduire que $\overrightarrow{\mathrm{AG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BD}} = 0$.
   (c) On admet que $\overrightarrow{\mathrm{AG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BE}} = 0$.
   Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).

2. L'espace est muni du repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.
   (a) Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (BDE) est $x + y + z - 1 = 0$.
   (b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection K de la droite (AG) et du plan (BDE).
   (c) On admet que l'aire, en unité d'aire, du triangle BDE est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   Calculer le volume de la pyramide $BDEG$.

Exercice 3



Dans l'espace, on considère le cube ABCDEFGH représenté ci-contre.
On note I et J les milieux respectifs des segments [EH] et [FB].
On munit l'espace du repère orthonormé $\left(\mathrm{A}; \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

1. Donner les coordonnées des points I et J.

2. (a) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BGI).
   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (BGI).
   (c) On note K le milieu du segment $[HJ]$. Le point K appartient-il au plan (BGI) ?

3. Le but de cette question est de calculer l'aire du triangle BGI.
   (a) En utilisant par exemple le triangle FIG pour base, démontrer que le volume du tétraèdre $FBIG$ est égal à $\dfrac{1}{6}$.
   On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule $V = \dfrac{1}{3}B \times h$ où B désigne l'aire d'une base et h la hauteur correspondante.
   (b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par F et orthogonale au plan (BGI).
   (c) La droite Δ coupe le plan (BGI) en F'. Montrer que le point F' a pour coordonnées $\left(\frac{7}{9}\ ;\ \frac{4}{9}\ ;\ \frac{5}{9}\right)$.
   (d) Calculer la longueur FF'. En déduire l'aire du triangle BGI.