

Probabilités et statistiques



Exercice 1 (QCM)

1. Une entreprise souhaite estimer la proportion de personnes de plus de 20 ans parmi ses clients, au niveau de confiance de 95%, avec un intervalle d'amplitude inférieure à 0,05. Elle interroge pour cela un échantillon aléatoire de clients. Quel est le nombre minimal de clients à interroger ?

40

400

1600

20

Exercice 2

Pour $n = 1000$, un algorithme donne une valeur $f = 0,781$.

1. Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95%, de la valeur exacte de p (originellement de J , une intégrale dont f est une valeur approchée).
2. Quelle doit-être, au minimum, la valeur de n pour que l'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95%, ait une amplitude inférieure ou égale à 0,02 ?

Exercice 3

Une société annonce un taux de satisfaction de 85% pour ses clients ayant appelé et obtenu un opérateur. Une association de consommateurs souhaite vérifier ce taux et interroge 1 303 personnes. Parmi celles-ci, 1 150 se disent satisfaites. Que pensez-vous du taux de satisfaction annoncé par la société ?

Exercice 4

Un laboratoire qui produit un médicament annonce que 30% des patients qui l'utilisent présentent des effets secondaires. Afin de tester cette hypothèse, un cardiologue sélectionne de manière aléatoire 100 patients traités avec ce médicament.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la proportion de patients suivant ce traitement et présentant des effets secondaires.
2. L'étude réalisée auprès des 100 patients a dénombré 37 personnes présentant des effets secondaires.

Que peut-on en conclure ?

3. Pour estimer la proportion d'utilisateurs de ce médicament présentant des effets secondaires, un organisme indépendant réalise une étude basée sur un intervalle de confiance au niveau de confiance 95%. Cette étude aboutit à une fréquence observée de 37% de patients présentant des effets secondaires, et à un intervalle de confiance qui ne contient pas la fréquence 30%.

Quel est l'effectif minimal de l'échantillon de cette étude ?

Exercice 5

Dans un parc d'attraction, la probabilité qu'un visiteur soit satisfait du grand huit vaut 0,822 5.

Le directeur est soucieux de savoir si le temps d'attente, plus important les jours de grande affluence, remet en cause le taux de satisfaction des visiteurs. Pour cela, on interroge 200 personnes au hasard à la sortie du grand huit. Parmi elles, 46 se disent insatisfaites.

Le directeur peut-il être rassuré ?

Exercice 6

Question préliminaire

Soit T une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ , où λ désigne un réel strictement positif.

On rappelle que, pour tout réel a positif, on a : $P(T \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t} dt$.

Démontrer que, pour tout réel a positif, $P(T > a) = e^{-\lambda a}$.

Dans la suite de l'exercice, on considère des lampes à led dont la durée de vie, exprimée en jour, est modélisée par une variable aléatoire T suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{2800}$.

Les durées seront données au jour près, et les probabilités au millième près

Partie A : étude d'un exemple

1. Calculer la probabilité qu'une lampe fonctionne au moins 180 jours.
2. Sachant qu'une telle lampe a déjà fonctionné 180 jours, quelle est la probabilité qu'elle fonctionne encore au moins 180 jours ?

Partie B : contrôle de la durée de vie moyenne

Le fabricant de ces lampes affirme que, dans sa production, la proportion de lampes qui ont une durée de vie supérieure à 180 heures est de 94 %.

Un laboratoire indépendant qui doit vérifier cette affirmation fait fonctionner un échantillon aléatoire de 400 lampes pendant 180 jours.

On suppose que les lampes tombent en panne indépendamment les unes des autres.

Au bout de ces 180 jours, 32 de ces lampes sont en panne.

Au vu des résultats des tests, peut-on remettre en cause, au seuil de 95 %, la proportion annoncée par le fabricant ?

Partie C : dans une salle de spectacle

Pour éclairer une salle de spectacle, on installe dans le plafond 500 lampes à led.

On modélise le nombre de lampes fonctionnelles après 1 an par une variable aléatoire X qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 440$ et d'écart-type $\sigma = 7,3$.

1. Calculer $P(X > 445)$, la probabilité que plus de 445 lampes soient encore fonctionnelles après un an.
2. Lors de l'installation des lampes dans le plafond, la direction de la salle veut constituer un stock de lampes.

Quelle doit-être la taille minimale de ce stock pour que la probabilité de pouvoir changer toutes les lampes défectueuses, après un an, soit supérieure à 95 % ?

Exercice 7

La durée de stationnement d'une voiture dans un parking de centre-ville est modélisée par une variable aléatoire T' qui suit une loi normale d'espérance μ' et d'écart-type σ' . On sait que la moyenne du temps de stationnement dans ce parking est égale à 30 minutes et que 75% des voitures ont un temps de stationnement inférieur à 37 minutes.

Le gestionnaire du parking vise l'objectif que 95% des voitures aient un temps de stationnement entre 10 et 50 minutes. Cet objectif est-il atteint ?