Exercice 1 (3 points)

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= \dfrac{1}{2-u_n} \text{ pour tout entier naturel } n \geqslant 0. \end{cases}$.

On obtient à l'aide d'un tableur les premiers termes de cette suite :

	A	B	C
1		u_n	u_n
2	n	(en valeurs exactes)	(en valeurs approchées)
3	0	0	0
4	1	1/2	0,5
5	2	2/3	0,666 666 667
6	3	3/4	0,75
7	4	4/5	0,8
8	5	5/6	0,833 333 333
9	6	6/7	0,857 142 857
10	7	7/8	0,875
11	8	8/9	0,888 888 889
12	9	9/10	0,9
13	10	10/11	0,909 090 909

Prouver que la suite (u_n) converge.

Exercice 2 (3 points)

Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n$.
On considère également la suite v définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5$.

1. Voici un extrait de feuille de tableur :

	A	B	C
1	n	u	v
2	0	2	7
3	1	4	14
4	2	9	28
5	3	24	56
6	4	63	

   Quelles formules a-t-on écrites dans les cellules C2 et B3 et copiées vers le bas pour afficher les termes des suites u et v ?

2. Déterminer, en justifiant, une expression de v_n et de u_n en fonction de n uniquement.

Exercice 3 (6 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{e^{-(n-1)x}}{1+e^x}$. On désigne par $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On a représenté ci-dessous (voir à la fin) les courbes $\mathcal{C}_n$ pour différentes valeurs de n.
Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

Partie A - Étude graphique

1. Donner une interprétation graphique de u_n.

2. Quelles conjectures peut-on faire concernant les variations et la convergence de la suite (u_n) ?
3. Proposer, à l'aide du graphique et en expliquant la démarche, un encadrement de u_4 d'amplitude 0,05.

Partie B - Étude théorique

1. Montrer que $u_0 = \ln\left(\frac{1+\mathrm{e}}{2}\right)$.
2. Montrer que $u_0 + u_1 = 1$ puis en déduire u_1.
3. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$.
4. On pose pour tout entier naturel n et pour tout x réel, $d_n(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x)$.
   (a) Montrer que, pour tout nombre réel $x, d_n(x) = \mathrm{e}^{-nx}\frac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$.
   (b) Étudier le signe de la fonction d_n sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
5. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
6. On note ℓ la limite de la suite (u_n).
   (a) Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a : $u_n + u_{n+1} = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n}$.
   (b) En déduire la valeur de ℓ.
   (c) On souhaite construire un algorithme qui affiche la valeur de u_N pour un entier naturel N non nul donné.
   Recopier et compléter les quatre lignes de la partie **Traitement** de l'algorithme suivant.

Entrée :	N est un entier naturel non nul
Variables :	U est un nombre réel
	K est un entier naturel
Initialisation :	Affecter 1 à K
	Affecter $1 - \ln\left(\frac{1+\mathrm{e}}{2}\right)$ à U
	Demander à l'utilisateur la valeur de N
Traitement :	Tant que $K < N$
	Affecter .... à U
	Affecter .... à K
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher U