Chapitre : Suites

∽

⊛ **Activité :** Fiche d'exercice sur les exposants

I. Limites

⊛ **Activité :** 2p10

1. Définitions

Un des principaux buts de l'étude d'une suite est l'étude de son comportement lorsque l'indice n prend de grandes valeurs.

a. Limite finie

Définition Soit l un nombre réel.
Une suite u a pour limite l si tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
Autrement dit si : quelque soit $a > 0$, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \in]l-a; l+a[$.
On note alors :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = l$$

Dans ce cas, on dit que la suite u **converge** (vers l).

Exemple La suite u définie pour tout $n > 1$ par $u_n = \frac{1}{n} + 2$ converge vers 2.
En effet, soit $a > 0$. Comme $n > 0$, on a $\frac{1}{n} > 0$ et donc $u_n > 2 > 2 - a$.
Par suite, $\frac{1}{n} + 2 < 2 + a$ équivaut à $\frac{1}{n} < a$, soit à $n > \frac{1}{a}$ (justifier !).
Ainsi, en posant $n_0 = E\left(\frac{1}{a}\right) + 1$ (où E désigne la partie entière), on a, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n < 2 + a$.
Finalement, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \in]2-a; 2+a[$.

Définition Une suite qui n'est pas convergente (donc qui n'a pas de limite finie) est dite **divergente**

⚠ Il y a plusieurs manières pour une suite de diverger.
L'une d'elles est d'avoir une limite infinie.

b. Limite infinie

Définition Une suite u a pour limite $+\infty$ si, quelque soit le nombre réel A, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite u sont dans $[A; +\infty[$.
Autrement dit, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n > A$.
On note :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

Définition Une suite u a pour limite $-\infty$ si la suite $-u$ a pour limite $+\infty$.

certaines suites divergent sans avoir de limite. C'est le cas de la suite u de terme général $u_n = (-1)^n$, qui alterne successivement entre 1 et -1.

c. Quelques propriétés

Propriété

- Les suites de terme général $\dfrac{1}{n}$, $\dfrac{1}{n^2}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ sont convergentes et convergent vers 0 ;
- Les suites de terme général n, n^2 et $\sqrt{n}$ sont divergentes et ont pour limite $+\infty$;
- Toute suite constante est convergente et a pour limite la constante.

Démonstration : Exercice (certains seront donnés plus bas)

Propriété Si une suite est convergente, alors sa limite est unique.

▶ **Exercices :** 54,55,57,58p25
Algorithme : Trouver le rang à partir duquel $u_n > A$. Voir page 14 et page 15.

▶ **Exercices :** 60,61 p25

▶ **Exercice :** (en DM) : 62p25

2. Opérations

⊛ **Activité :** 3p11 ($0 \times +\infty$!)
Au lieu de toujours se ramener à la définition, on peut considérer des opérations sur les limites.
Il est alors important de connaître les différents cas.
Voir le livre page 16 (et recopier les tableaux).
Attention à certains cas **indéterminés** :

$$+\infty - \infty \quad ; \quad 0 \times \infty \quad ; \quad \frac{\infty}{\infty} \quad ; \quad \frac{0}{0}$$

Toute forme intéterminée doit être **levée**, c'est à dire qu'il faut réécrire l'expression pour que sa forme ne soit plus indéterminée.
Il est inutile, car ce n'est pas une réponse, de dire qu'une forme est indéterminée et de s'arrêter là.

Exemple Soit $u_n = n^2 - n$. On a une forme indéterminée : $+\infty - \infty$. Pour lever cette indétermination, on factorise par n^2 :

$$u_n = n^2\left(1 - \frac{n}{n^2}\right) = n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{n} = 1 - 0 = 1$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

▶ **Exercices :** 67,68,69 p26

3. Comparaisons

Théorème Soit u et v deux suites telles que $v_n \geqslant u_n$ à partir d'un certain rang.
Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

Démonstration (exigible) : Soit A un réel.
Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, il existe un entier n_1 tel que pour tout $n \geqslant n_1$, $u_n > A$.
De plus, on sait qu'il existe un entier n_2 tel que pour tout $n \geqslant n_2$, $v_n \geqslant u_n$.
Soit $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Alors pour tout $n \geqslant n_0$, on a $v_n \geqslant u_n > A$, soit $v_n > A$.
Ainsi par définition, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.
De manière similaire en $-\infty$:

Théorème Soit u et v deux suites telles que $v_n \leqslant u_n$ à partir d'un certain rang.
Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$.

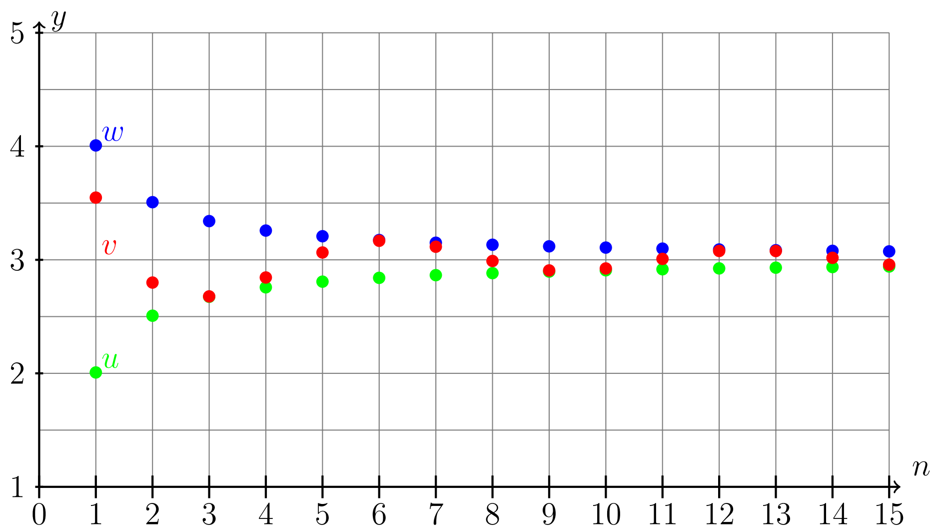
Exemple Soit $u_n = n + \cos(n)$. On a, quelque soit $n \geqslant 0$, $\cos(n) > -1$. Ainsi donc, quelque soit $n \geqslant 0$, $u_n > n - 1$. En posant $v_n = n - 1$, puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

▶ **Exercice :** 71p26 (questions 1,3,4)

⊛ **Activité :** 4p11

Théorème **(des gendarmes)** Soit u, v et w trois suites réelles. Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, et si u et w convergent vers le même réel l, alors v converge également vers l.

Démonstration : Admis



▶ **Exercice :** 19,23p22 et question 2 du 71p26

II. Récurrence

⊛ **Activité :** Fiche d'introduction du principe de récurrence.

1. Principe de récurrence

Propriété **(Principe de récurrence)** Si une propriété est vraie pour l'entier naturel n_0 et s'il est prouvé que, lorsqu'elle est vraie pour un entier fixé n supérieur ou égal à n_0, elle est vraie aussi pour l'entier $n+1$, alors elle est vraie pour tous les entiers supérieurs ou égaux à n_0.

La rédaction pour un raisonnement par récurrence se fait de la manière suivante :

- on définit la propriété $\mathcal{P}(n)$ dont on veut démontrer qu'elle est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.
- On fait l'initialisation, c'est à dire que l'on prouve que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
- On démontre que $\mathcal{P}$ est héréditaire.

  Pour cela, on fait l'hypothèse que pour un certain n fixé supérieur ou égal à n_0, $\mathcal{P}(n)$ est vraie (On appelle cela l'hypothèse de récurrence).

  Puis l'on démontre qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- On peut conclure, par le principe de récurrence, que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

En tant qu'exemple, nous allons démontrer par récurrence la proposition suivante :

Propriété Soit $\alpha > 0$. Alors quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $(1+\alpha)^n \geqslant 1 + \alpha n$.

Démonstration : Elle se fait par récurrence sur l'entier n. Soit $\mathcal{P}(n)$: « $(1+\alpha)^n \geqslant 1+\alpha n$ ».
Initialisation : Soit $n = 0$. Alors $(1+\alpha)^n = (1+\alpha)^0 = 1$. D'autre part, $1 + \alpha n = 1 + \alpha \times 0 = 1$. Et on a bien $1 \geqslant 1$. Donc la propriété est vraie pour $n = 0$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que la propriété $\mathcal{P}(n)$ soit vraie.
L'hypothèse de récurrence est donc que $(1+\alpha)^n \geqslant 1+\alpha n$.
Nous devons démonter que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, donc que $(1+\alpha)^{n+1} \geqslant 1 + \alpha(n+1)$.
Or, $(1+\alpha)^{n+1} = (1+\alpha)^n \times (1+\alpha)$.
Par hypothèse de récurrence, $(1+\alpha)^n \geqslant 1+\alpha n$. Comme $1+\alpha > 0$, on a donc

$$(1+\alpha)^n \times (1+\alpha) \geqslant (1+\alpha n) \times (1+\alpha)$$

Or $(1+\alpha n) \times (1+\alpha) = 1 + \alpha n + \alpha + \alpha^2 n = 1 + \alpha(n+1) + \alpha^2 n$. Et comme $\alpha^2 n \geqslant 0$, on obtient bien que $(1+\alpha)^{n+1} \geqslant 1 + \alpha(n+1)$.
Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : Puisque $\mathcal{P}(0)$ est vraie et $\mathcal{P}$ est héréditaire, alors d'après le principe de récurrence $\mathcal{P}(n)$ est vraie quelque soit l'entier $n \geqslant 0$.

▶ **Exercices :** 42,43,45,46,50p24

▶ **Exercices :** 1 à 6p22

▶ **Exercice :** 49p24

★ **Approfondissement :** 119,120p37

2. Application : limites des suites géométriques

Propriété Soit q un réel et u la suite de terme général q^n. Alors :

- Si $-1 < q < 1$,alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$: u converge vers 0 ;
- Si $q > 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$: u diverge vers $+\infty$;
- Si $q = 1$, alors u est constante égale à 1 (donc converge vers 1) ;
- Si $q \leqslant -1$, alors u est divergente et n'a pas de limite.

Démonstration (exigible pour $q > 1$) :
On suppose donc $q > 1$, et on doit prouver que $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
On pose $\alpha = q - 1$. Comme $q > 1$, on a $\alpha = q - 1 > 0$. De plus, on a $q = 1 + \alpha$.
D'après la propriété démontrée précédemment, $q^n = (1+\alpha)^n > 1 + \alpha n$.
Or, par simple opération sur les limites, $\lim_{n\to+\infty} 1 + \alpha n = +\infty$ car $\alpha > 0$.
Ainsi, par comparaison, $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

▶ **Exercices :** 25,26,27,29,30p23

▶ **Exercices :** 73,74p26

III. Majorants et minorants

Définition

- Une suite u est **majorée** s'il existe un réel M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$.
- Une suite u est **minorée** s'il existe un réel m tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant m$.
- Une suite est **bornée** si elle est majorée et minorée.

Exemple La suite u de terme général $(-1)^n$ est bornée (par -1 et 1).
Autres exemples :

- 2^n (minorée par 1, par 0) ;
- $\frac{1}{n}$ (majorée par 1, minorée par 0, donc bornée).

Exemple

- Une suite croissante est toujours minorée (par son premier terme)
- Une suite décroissante est toujours majorée (par son premier terme).

Propriété Soit u une suite croissante qui converge vers un réel l.
Alors u est majorée par l.

Démonstration (non exigible) : On fait une preuve par l'absurde, en supposant qu'il existe un entier n_1 tel que $u_{n_1} > l$. Or, comme u est croissante, alors pour tout $n \geqslant n_1$, $u_n \geqslant u_{n_1}$. Mais la suite converge vers l. Cela signifie en particulier qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout $n > n_0$, $u_n \in]l-1; u_{n_1}[$ (un intervalle ouvert contenant l). Cela est contradictoire, car si l'on prend un entier n supérieur à la fois à n_0 et à n_1, alors on a $u_n \geqslant u_{n_1}$ **et** $u_n < u_{n_1}$!

▶ **Exercices :** 32,38,35,36p23

▶ **Exercices :** 81,82p27

⊛ **Activité :** 5p11 (conjecture du théorème ci-dessous)

Théorème

- Si une suite croissante est majorée, alors elle converge ;
- Si une suite décroissante est minorée, alors elle converge.

Démonstration : Admis

Corollaire Une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.

Démonstration (non exigible) : Soit u une suite croissante non majorée. Soit A un réel. Comme u n'est pas majorée (par A en particulier), il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} > A$. Mais alors, comme u est croissante, alors pour tout $n > n_0$, $u_n > u_{n_0} > A$.
Ainsi, u diverge bien vers $+\infty$ par définition.

▶ **Exercice :** 40p23

▶ **Exercices :** 91,92p27

▶ **Exercices :** (divers) 85,87p27