Chapitre :
Probabilités conditionnelles

∽

I. Définition et propriétés

⊛ **Activité :** 1p294

Définition Soit A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$.
La **probabilité (conditionnelle) de *B* sachant *A*** est le nombre $\mathbb{P}_A(B)$ défini par :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

La propriété conditionnelle est une probabilité, en particulier elle en a les propriétés :

Propriété Soit A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. Alors :

$$0 \leqslant \mathbb{P}_A(B) \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_A(\overline{B}) = 1$$

Propriété Dans le cas où la loi est équirépartie, on peut utiliser la formule suivante :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\text{nombre d'éléments de } B \cap A}{\text{nombre d'éléments de } A}$$

Propriété On peut éventuellement calculer de deux manières différentes $\mathbb{P}(A \cap B)$:

- Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$, alors $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)$;
- Si $\mathbb{P}(B) \neq 0$, alors $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(A)$;

Démonstration : Il suffit de réécrire la définition de probabilité conditionnelle en échangeant le rôle de A et B.

▶ **Exercices :** 2,1p302 (compréhension d'énoncés, traductions en probabilité)

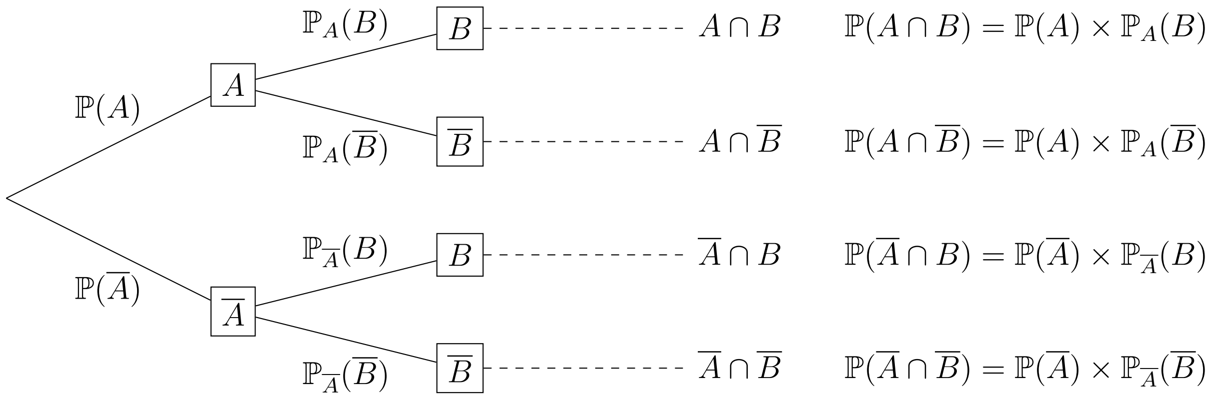
▶ **Exercices :** 9p302 et 11p303 (tableau de probabilités)

▶ **Exercices :** 21,22,23p304

▶ **Exercice :** (en DM) 28p304 (loi binomiale)

II. Arbres pondérés et probabilités totales

⊛ **Activité :** 2p294 puis 3p295
Voici comment un arbre de probabilités est pondéré avec les probabilités conditionnelles :



Méthode

- La somme des branches issues d'un même nœud vaut toujours 1 ;
- On effectue le produit le long des branches ;
- Si un événement correspond à plusieurs branches, alors on ajoute les probabilités des branches.

Propriété **(Formule des probabilités totales)**
On suppose que l'univers probabiliste est la réunion des événements A_1, A_2, $\ldots$, A_n deux à deux incompatibles et de probabilité non nulle. Pour tout événement B on a alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A_1 \cap B) + \mathbb{P}(A_2 \cap B) + \cdots + \mathbb{P}(A_n \cap B) \\ &= \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(B) + \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_2}(B) + \cdots + \mathbb{P}(A_n) \times \mathbb{P}_{A_n}(B)\end{aligned}$$

Dans le cas particulier où l'on a l'arbre plus haut, on a donc :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\overline{A}) \times \mathbb{P}_{\overline{A}}(B)$$

Méthode Dans la plupart des exercices utilisant les probabilités conditionnelles, il y a toujours une question où l'on cherche à « inverser » le sens de l'arbre. Autrement dit, on cherche par exemple à savoir ce que vaut $\mathbb{P}_B(A)$.
Pour cela, il faut alors utiliser la formule $\mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$, les deux probabilités nécessaires ayant généralement été calculées précédemment.
En particulier, $\mathbb{P}(A \cap B)$ a été obtenue en multipliant le long d'une branche et $\mathbb{P}(B)$ a été calculée avec la formule des probabilités totales.

▶ **Exercices :** 14p303

▶ **Exercices :** 41p305, 44,45p306

▶ **Exercices :** (groupe ou ACCPE) 46p307 (algo, corrigé)

III. Indépendance

Définition Soit A et B deux événements de probabilité non nulle.
On dit que B est indépendant de A si $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$, autrement dit si la réalisation ou non de l'événement A n'a aucune influence sur celle de B.
Dans ce cas, on a alors aussi $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$, autrement dit A est indépendant de B aussi.
En effet, $\mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A)$.
En échangeant les noms des événements, on voit alors que c'est réciproque.
On dit alors simplement que les deux événements A et B sont indépendants si et seulement si l'une des deux égalités suivantes est vraie (ce qui implique que l'autre l'est aussi) :

$$\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B) \qquad \text{ou} \qquad \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$$

Propriété Soit A et B deux événements de probabilité non nulle.
A et B sont indépendants si et seulement si :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

Démonstration : Il suffit de voir plus haut.

Propriété Soit A et B deux événements indépendants.
Alors il en est de même pour les événements $\overline{A}$ et B, pour les événements A et $\overline{B}$ et pour les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

Démonstration (exigible) : On démontre que $\overline{A}$ et B sont indépendants.
On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) &= \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(\overline{A}) \quad \text{utilisation des probabilités conditionnelles} \\
&= \mathbb{P}(B) \times (1 - \mathbb{P}_B(A)) \qquad \text{propriété d'une loi de probabilité} \\
&= \mathbb{P}(B) \times (1 - \mathbb{P}(A)) \qquad \text{car } A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \\
&= \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(\overline{A}) \quad \text{propriété d'une loi de probabilité}
\end{aligned}$$

Par la propriété précédente, on a bien démontré que $\overline{A}$ et B sont indépendants.

▶ **Exercices :** 17,18,20p303

▶ **Exercices :** 51,52,54p307

▶ **Exercice :** (en DM) 53p307

▶ **Exercice :** (ACCPE) Marche aléatoire : TPp312 (A et B)