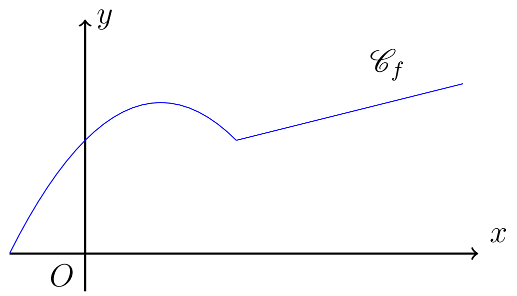
Chapitre :
Généralités sur les fonctions

∽

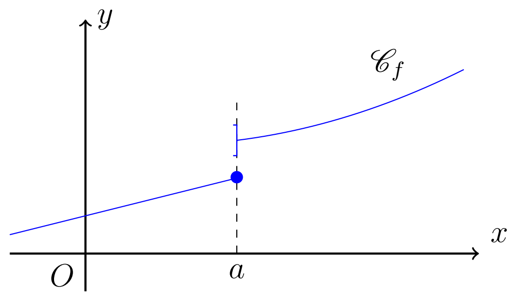
I. Continuité

⊛ **Activité :** 4p43

Définition (Provisoire) Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est continue sur I si sa courbe représentative peut être tracée « sans lever le crayon ».



Fonction continue



Fonction non continue (en a)

Propriété Les fonctions usuelles suivantes sont continues sur tout intervalle où elles sont définies :

$$x \mapsto x^n \ (n \in \mathbb{N}) \qquad x \mapsto \sqrt{x} \qquad x \mapsto \frac{1}{x} \qquad x \mapsto |x|$$

Démonstration : Admis

Propriété Soit u et v deux fonctions définies et continues sur un intervalle I. Alors :

- $u+v$, $u \times v$ et u^n $(n \in \mathbb{N})$ sont continues sur I ;
- $\frac{1}{v}$, $\frac{u}{v}$ sont continues sur tout intervalle où elles sont définies.

Démonstration : Admis

Remarque En particulier, toute fonction polynomiale est continue sur $\mathbb{R}$, et toute fonction quotient de fonctions polynomiales (on dit rationnelle) est continue sur tout intervalle où elle est définie.

Propriété Si une fonction est dérivable sur un intervalle I, alors elle est continue sur I.

Méthode Pour démontrer qu'une fonction définie par morceaux avec des expressions usuelles est continue, il suffit de vérifier que les morceaux se raccordent.

Exemple Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} -x^2+2x+3 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 5x+2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.
(Remarque : $f(0)$ se calcule avec la première expression, pas la seconde)
On vérifie si les valeurs obtenues sont les mêmes pour $x = 0$:

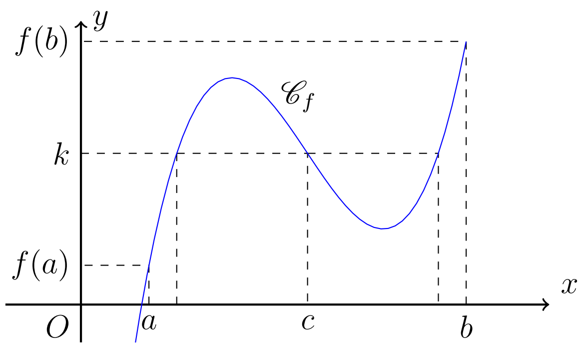
- d'une part $-x^2+2x+3=3$
- d'autre part $5x+2=2$

Les valeurs étant différentes, f n'est pas continue en 0.

▶ **Exercice :** 99p60

Théorème **(des valeurs intermédiaires)** Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a;b]$. Alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c)=k$.

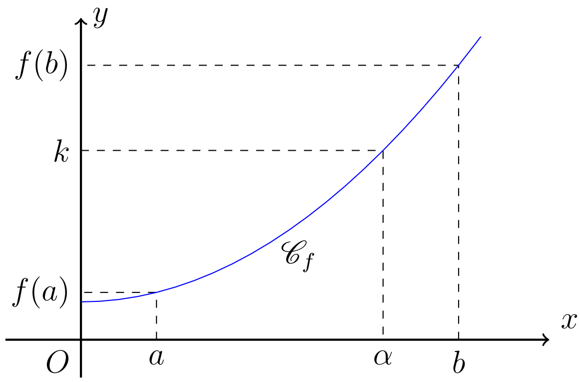
Démonstration : Admis



Nous utiliserons plus souvent le corollaire suivant :

Corollaire Soit f une fonction définie, continue et **strictement monotone** sur un intervalle $[a;b]$. Alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ admet une **unique** solution α sur l'intervalle $[a;b]$.

Démonstration : Admis



Remarque Dans la plupart des cas, on ne peut pas déterminer de valeur exacte de la solution. Seule une valeur approchée peut être obtenue, par exemple avec la calculatrice.
Pour cela, on peut utiliser un algorithme de dichotomie (voir page 53).

Exemple Faire l'exercice 33 de la page 55

▶ **Exercices :** 104,105,106p61 (avec intervalles infinis)

▶ **Exercice :** 110p62 (algorithme et calculatrice, solution de $f(x)=k$; améliore celui de la page 53)

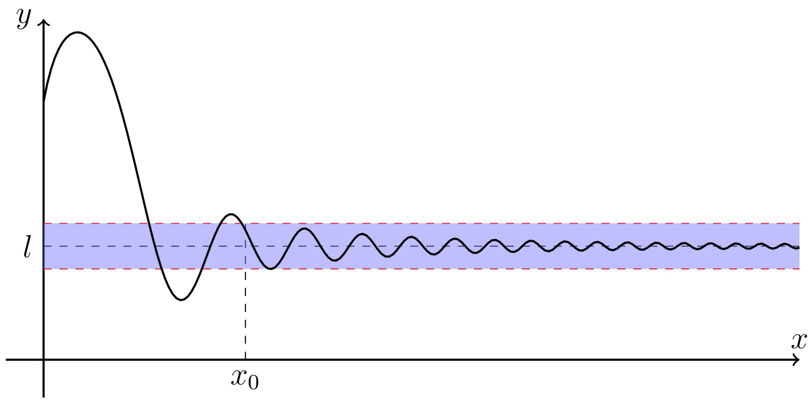
II. Limites

⊛ **Activité :** QCM 1,2,3 page 40

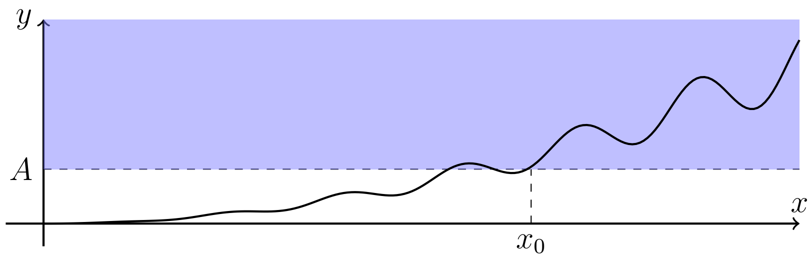
1. Limite à l'infini

Soit f une fonction, soit l un réel.

Définition On dit que f a pour limite l en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.
Autrement dit, quelque soit l'intervalle ouvert I contenant l, il existe un réel x_0 tel que pour tout $x \geqslant x_0$, $f(x) \in I$.
On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$, et on dit que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers $+\infty$.



Définition On dit que f a pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) en $+\infty$ si quel que soit le réel A, il existe un réel x_0 tel que pour tout $x > x_0$, $f(x) > A$ (resp. pour tout $x < x_0$, $f(x) < A$).
On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$).



On peut donner des définitions similaires pour les limites lorsque x tend vers $-\infty$.

▶ **Exercice :** 4p54
Les méthodes vues sur les suites restent valable ici avec les fonctions.

▶ **Exercices :** (éventuellement) 7,8,9 p54 (exemples d'indéterminées)

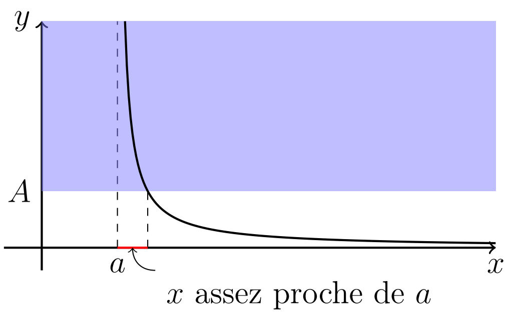
▶ **Exercices :** 15,16p54 et 17,18p55 (polynomiales et fraction rationnelles)

2. Limite infinie en un réel a

⊛ **Activité :** considérer une fonction inverse et la limite quand x tend vers 0 (à gauche et à droite).

Soit a un réel.
Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a; a+r]$ ou $[a-r; a[$, où r est un réel positif.
(remarquer que f n'est *a priori* pas définie en a)

Définition On dit que f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers a si pour tout réel A, l'intervalle $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de a.
On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.



On peut donner une définition similaire pour une limite égale à $-\infty$.
Dans certains cas, on différencie avec une limite à gauche et une limite à droite.

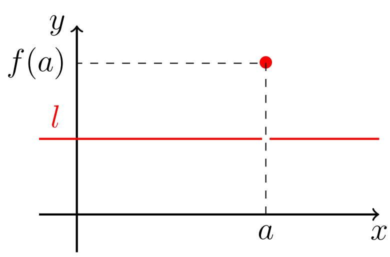
Exemple On a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$.

3. Limite finie en un réel. Continuité

Il existe également une définition de limite finie en un réel. Cette définition n'est pas au programme.
Cependant :

Définition (Continuité) Soit f une fonction et a un réel. On dit que f est continue en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, autrement dit si f a une limite finie en a et si cette limite est l'image par f de a.

Exemple Ci-dessous, on observe que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \neq f(a)$. Donc f n'est pas continue en a :



Pour calculer une limite en un réel a lorsque la fonction f est définie et continue en a, il s'agit donc simplement de remplacer x par a dans l'expression de f et de calculer.

4. Règles de calcul

Tout comme pour les suites, il existe des règles de calcul pour les limites de fonctions.
Voir page 46 pour un tableau récapitulatif.
les mêmes méthodes peuvent être appliquées pour les limites à l'infini.
Cependant quelques cas évités le plus souvent avec les suites apparaissent pour les fonctions.
C'est le cas en particulier pour les limites de la forme « $\frac{L}{0}$ ». Cette forme est en principe indéterminée, à moins d'observer que le 0 est atteint par valeurs supérieures ou par valeurs inférieures. Il faut alors étudier le signe de l'expression qui tend vers 0.

Exemple On a $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$ car $(x-1)^2 > 0$ pour tout $x \neq 1$.

▶ **Exercices :** 20,21,22,23p55 (limite en un point)

▶ **Exercices :** 55,57p57 (L/u avec u qui tend vers 0 ; étude du signe)

Dans certains cas, il faut décomposer le calcul des limites.

Exemple Soit $f : x \mapsto \sqrt{1-x}$ définie sur $]-\infty; 1]$ (pourquoi ?).
Le calcul de la limite en 1 est facile puisque la fonction est continue en 1 :
$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = \sqrt{1-1} = 0$.
Pour déterminer la limite de f en $-\infty$, on détermine d'abord la limite de $h : x \mapsto 1-x$ quand x tend vers $-\infty$. Or $\lim\limits_{x \to -\infty} 1-x = +\infty$. Par suite, on sait que $\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$. Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{1-x} = +\infty$.

De manière plus générale :

Théorème **(Admis)**
Soit a, b et c représentant des réels, $+\infty$ ou $-\infty$.
Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$ et si $\lim\limits_{X \to b} v(X) = c$, alors $\lim\limits_{x \to a} v(u(x)) = c$.

▶ **Exercices :** 74,75p59 (composition)

▶ **Exercice :** 77p59

5. Règles de comparaison

On admet que l'on a les mêmes résultats suivants que pour les suites :

Théorème **(des gendarmes)** Soit f, g et h des fonction et l un réel. Si :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = l$;
- il existe un réel x_0 tel que pour tout $x > x_0$, $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$,

alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.

Démonstration (idée) : Soit I un intervalle ouvert contenant l. Par hypothèse, et d'après la définition de limite finie à l'infini, pour x assez grand, $g(x)$ et $h(x)$ se trouvent dans cet intervalle. Or pour x assez grand, $f(x)$ est compris entre $g(x)$ et $h(x)$. Donc $f(x)$ est compris dans I.

Propriété Soit f et g deux fonctions. Si pour x assez grand $f(x) \geqslant g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Démonstration (idée) : Soit A un réel. Par hypothèse et définition, pour x assez grand, $g(x) \geqslant A$. Or pour x assez grand, $f(x) \geqslant g(x)$. Donc pour x assez grand, $f(x) \geqslant A$. D'où le résultat.

Il y a des propriétés analogues pour les limite en $-\infty$.

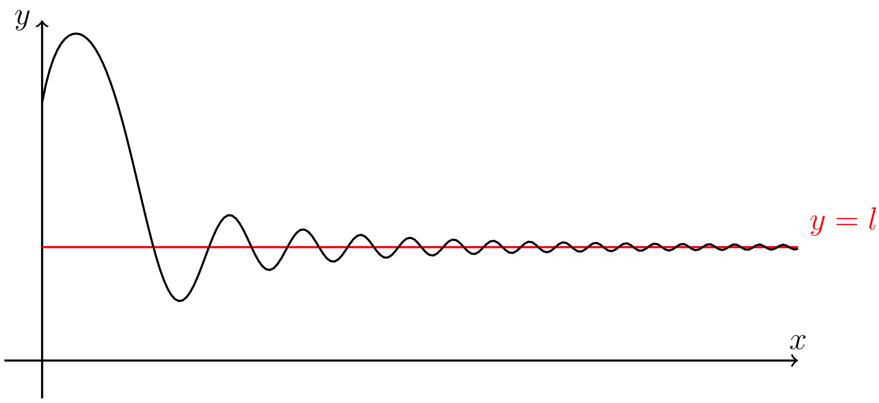
▶ **Exercices :** 28,29,30p55

▶ **Exercices :** 91,92,94p60

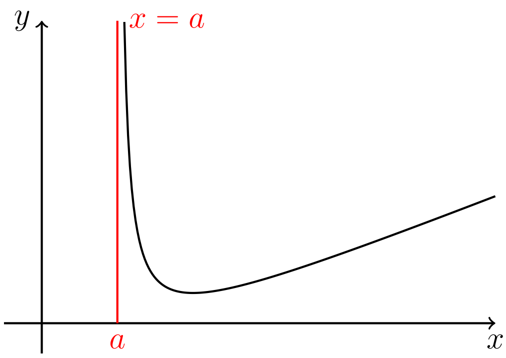
III. Asymptotes

Une asymptote est, grossièrement, une droite vers laquelle la courbe de la fonction f s'approche, ou autrement dit qui donne l'allure de la courbe de f quand x tend vers certaines valeurs.

Définition **(Asymptote horizontale)** Soit f une fonction et l un réel. Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$, alors la droite d'équation $y = l$ est une **asymptote** (horizontale) à la courbe de f en $+\infty$.
On définit de même une asymptote horizontale en $-\infty$.



Définition **(Asymptote verticale)** La courbe représentative de f admet une asymptote verticale d'équation $x = a$ si la limite de f en a est infinie.



Remarque Une asymptote horizontale peut être coupée par la courbe représentative de la fonction. Cependant une asymptote verticale n'est jamais coupée, étant donné que la fonction n'est pas définie en a.

▶ **Exercices :** 6p54

▶ **Exercices :** 63,64,65p58

▶ **Exercices :** 83p59, 84,86p60 (études de fonctions)

IV. Compléments de dérivation

1. Dérivée de $\sqrt{u}$

⊛ **Activité :** 1p76

Théorème Si u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I, alors la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

Démonstration : Soit a et h des réels tels que a et $a+h$ appartiennent à I.
Le taux d'accroissement $r(h)$ de la fonction $\sqrt{u}$ entre a et $a+h$ est égal à

$$\begin{aligned} r(h) &= \frac{\sqrt{u(a+h)} - \sqrt{u(a)}}{h} \\ &= \frac{u(a+h)-u(a)}{h} \times \frac{1}{\sqrt{u(a+h)} + \sqrt{u(a)}} \end{aligned}$$

u étant continue (car dérivable) sur I, on a $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{u(a+h)} + \sqrt{u(a)}} = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.
Comme u est dérivable en a, on a $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{u(a+h)-u(a)}{h} = u'(a)$.
Par conséquent, $\lim\limits_{h\to 0} = u'(a) \times \dfrac{1}{2\sqrt{u(a)}}$.
Finalement, $\sqrt{u}$ est dérivable en tout réel $a \in I$, donc sur I, et on a bien $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

► **Exercices :** 3,4p84, 49p86 (dérivation)

► **Exercices :** 16p84, 61,62p86 (étude)

2. Dérivée de u^n

Théorème Soit n un entier (relatif) non nul. Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, et si, dans le cas où n est négatif, u ne s'annule pas sur I, alors la fonction u^n est dérivable sur I et

$$(u^n)' = nu'u^{n-1}$$

Démonstration : On le démontre déjà pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. Si $u = 0$, alors le résultat est évident. On considère donc u non nulle, et on démontre le résultat par récurrence.
Soit $\mathcal{P}(n)$: « $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ ».

Initialisation : Soit $n_0 = 1$, alors $u^{n_0} = u^1 = 1$. Par suite, $(u^{n_0})' = u'$ et $n_0 u' u^{n_0 - 1} = 1u'u^0 = u'$.

Donc $(u^{n_0})' = n_0 u' u^{n_0-1}$: $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.

Étape de récurrence : On suppose que pour un certain entier $n \geqslant 1$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

On démontre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, autrement dit que $(u^{n+1})' = (n+1)u'u^n$.

Or, $u^{n+1} = u^n \times u$ est de la forme $v \times w$ avec $v = u^n$ et $w = u$.

Par hypothèse de récurrence, on a $v' = nu'u^{n-1}$. On utilisant la formule $(vw)' = v'w + vw'$, on a alors :

$$(u^{n+1})' = nu'u^{n-1} \times u + u^n \times u' = nu'u^n + u'u^n = (n+1)u'u^n$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est bien vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence on a démontré que pour tout entier $n \geqslant 1$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, autrement dit que :

$$(u^n)' = nu'u^{n-1}$$

Pour démontrer que la formule est valable aussi pour $n < 0$, on remarque que $u^n = \dfrac{1}{u^{-n}}$ avec $(-n) \in \mathbb{N}^\star$. On utilise alors la forme $\dfrac{1}{v}$ et la formule qui vient d'être démontrée.

Soit $v = u^{-n}$, alors $v' = -nu'u^{-n-1}$. Par suite, $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$, donc

$$(u^n)' = \left(\frac{1}{u^{-n}}\right)' = -\frac{-nu'u^{-n-1}}{(u^{-n})^2} = nu'\frac{u^{-n-1}}{u^{-2n}} = nu'u^{-n-1-(-2n)} = nu'u^{n-1}$$

▶ **Exercices :** 6,7p84, 52p86 (dérivation)

3. Dérivée de $x \mapsto f(ax+b)$

Propriété **(vue dans le chapitre sur l'exponentielle)**
Soit a et b deux réels. Soit I et J deux intervalles tels que si $x \in J$, alors $(ax+b) \in I$.
Soit f une fonction dérivable sur I.
Alors la fonction $g : x \mapsto f(ax+b)$ est dérivable sur J et a pour dérivée $g' : x \mapsto af'(ax+b)$

Démonstration : Admis.

▶ **Exercices :** 13,14p84

▶ **Exercice :** 56p86 (avec lecture graphique)