

Chapitre :

Lois à densité



⊗ **Activité** : Fiche Éco-point.

I. Variables aléatoires continues

Définition Soit X une variable aléatoire. Si X prend comme valeurs tous les nombres d'un intervalle I de \mathbb{R} , on dit que X est **continu**.

Dans ce cas, quelque soit t réel fixé *a priori*, la probabilité $\mathbb{P}(X = t)$ est nulle.

Ce qui correspond à la donnée de la loi de probabilité pour une variable continue est la **densité**.

Définition Une fonction f définie sur \mathbb{R} est appelée fonction **densité** si :

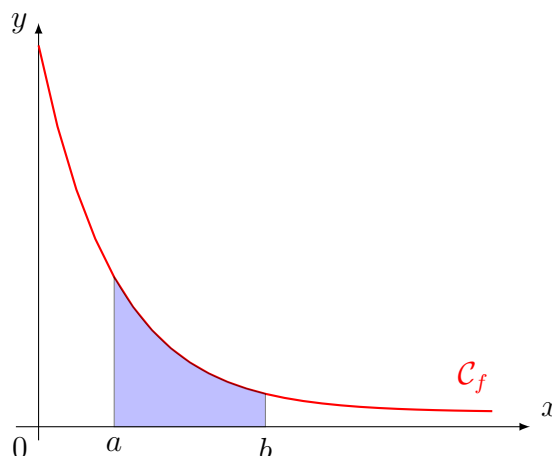
- f est positive sur \mathbb{R} : quelque soit x réel, $f(x) \geq 0$;
- f est continue sur \mathbb{R} sauf éventuellement en un nombre fini de valeurs (il peut y avoir un nombre fini de sauts) ;
- L'aire située entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de f dans un repère orthogonal est égale à 1 u.a.

Le troisième point revient à dire que la somme totale des probabilités vaut 1.

Définition Soit X une variable aléatoire continue ayant pour densité la fonction f . Soit a et b deux réels ($a < b$). Alors la probabilité que X prenne des valeurs comprises entre a et b est :

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)dt$$

Autrement dit il s'agit de l'aire délimitée par l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



Propriété | Soit k un réel quelconque et X une variable aléatoire continue. Alors $P(X = k) = 0$. Par conséquent, $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$. Autrement dit, on ne change pas la probabilité en ajoutant les bornes de l'intervalle $[a; b]$ ou non.

Propriété | Soit X une variable aléatoire continue. Soit a et b des réels. Alors :

- $\mathbb{P}(X > a) = 1 - \mathbb{P}(X \leq a)$
- $\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(X < b) - \mathbb{P}(X \leq a)$

► Exercices : 1,2,4,5p334

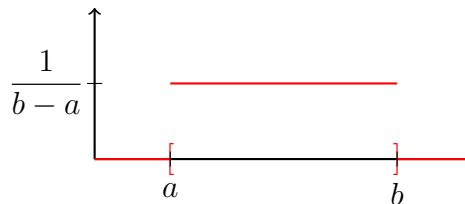
► Exercices : 37p336 (fonction affine) (sauf $E(X)$)

II. Loi uniforme

Définition | Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[a; b]$ si elle a pour densité la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La variable X prend toutes les valeurs possibles dans l'intervalle $[a; b]$, et ce de manière uniforme.

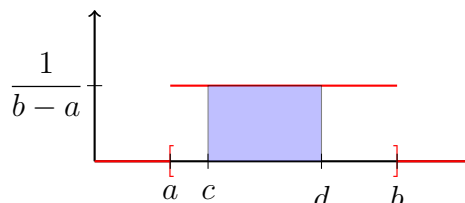


Propriété | Si X suit la loi uniforme sur $[a; b]$ et si c et d sont deux nombres de $[a; b]$ tels que $c < d$, alors

$$P(c \leq X \leq d) = \frac{d-c}{b-a}$$

soit le rapport entre l'amplitude de $[c; d]$ et celle de $[a; b]$.

Illustration :



► Exercices : 6,8p334

► Exercices : 48,49,53p337

► Exercice : 55p337

★ Approfondissement : 54p337 (équirépartie/uniforme), 50p337 (algo)

III. Loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$

⊗ **Activité** : (Salle avec vidéoprojecteur) Introduction : rappels graphiques sur la loi uniforme. Le mot « aléatoire » ne signifie pas toujours « uniformément réparti ». Exemple des tailles. Observation de la cloche. Observation de la loi binomiale, centrée réduite. Introduction de la fonction de densité de la loi normale centrée réduite.

Théorème | (de Moivre Laplace)

Soit $p \in]0; 1[$. On suppose que pour tout entier naturel n non nul, la variable aléatoire X_n suit une loi binomiale de paramètres n et p .

Soit Z_n la variable aléatoire définie par $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

Alors, quelque soit les réels a et b tels que $a < b$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(a \leq Z_n \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

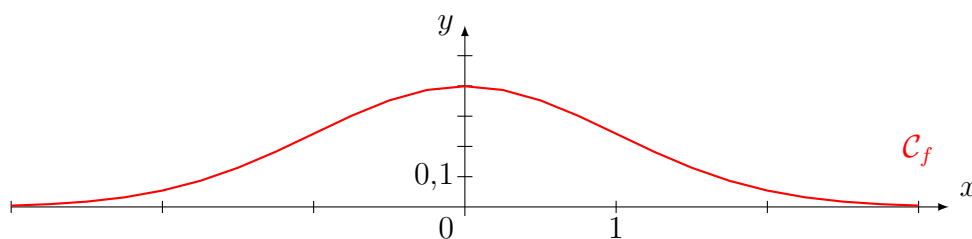
Définition Une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite si elle admet pour densité la fonction :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

On note $\mathcal{N}(0; 1)$ la loi normale centrée réduite.

Remarque Il n'y a pas d'expression de la primitive de f à l'aide de fonctions usuelles. Par conséquent, aucune expression de la fonction de répartition ne peut être donnée.

Remarque La courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées :



Représentation de la fonction f

Méthode Utilisation de la calculatrice : voir page 328.

Voir page 330 pour savoir comment utiliser la symétrie.

► **Exercices** : 17,18,19,20p335, 73p339 (calculer la probabilité)

► **Exercices** : 23,24,26p335 (chercher a), 75p339 (avec graphique)

► **Exercices** : 74p339, 78p339 ($\mathbb{P}(-a < X < a) = k$)

IV. Loi exponentielle

⊗ **Activité** : 3p323 : durée de vie sans vieillissement avec une loi discrète.

Définition Soit λ un réel **strictement positif**.

Une variable aléatoire T suit la loi exponentielle de paramètre λ si sa densité de probabilité est la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

Propriété | Si T suit la loi exponentielle de paramètre λ , alors pour tous réels a et b tels que $0 \leq a \leq b$, $\mathbb{P}(a \leq T \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$. Par suite,

$$\mathbb{P}(T \leq b) = 1 - e^{-\lambda b} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(T > a) = e^{-\lambda a}$$

Démonstration : Après avoir vu les primitives.

La fonction $F : x \mapsto -e^{-\lambda x}$ est une primitive de f sur $[0; +\infty[$.

Donc $\mathbb{P}(a \leq T \leq b) = \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) = -e^{-\lambda b} - (-e^{-\lambda a}) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$.

Par suite,

$$\mathbb{P}(T \leq b) = \mathbb{P}(0 \leq T \leq b) = e^{-\lambda 0} - e^{-\lambda b} = 1 - e^{-\lambda b}$$

puis

$$\mathbb{P}(T > a) = 1 - \mathbb{P}(T \leq a) = 1 - (1 - e^{-\lambda a}) = e^{-\lambda a}$$

Propriété | (**Durée de vie sans vieillissement**) Si T est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle, alors pour tous réels positifs t et h ,

$$\mathbb{P}_{T \geq t}(T \geq t + h) = \mathbb{P}(T \geq h)$$

Démonstration : On exprime :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{T \geq t}(T \geq t + h) &= \frac{\mathbb{P}(T \geq t \text{ et } T \geq t + h)}{\mathbb{P}(T \geq t)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(T \geq t + h)}{\mathbb{P}(T \geq t)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} \\ &= \frac{e^{-\lambda t} \times e^{-\lambda h}}{e^{-\lambda t}} \\ &= e^{-\lambda h} \\ &= \mathbb{P}(T \geq h) \end{aligned}$$

► **Exercices** : 10,12,13p334

► **Exercices** : 61p337, 62,64p338

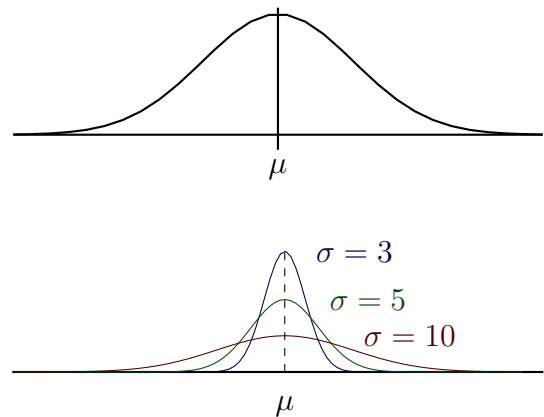
V. Loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$

Définition On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ si la variable aléatoire $\frac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$.
On note $X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$.

⚠ La notation donne la valeur σ^2 , et pas seulement σ .

La courbe de la fonction de densité pour une telle variable est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$.

l'écart-type σ donne une indication des écarts des valeurs prises à la moyenne. Plus σ est grande, plus les écarts peuvent être importants. Ainsi, la courbe de f « s'élargit », tout en s'écrasant vers l'axe des abscisses



(l'aire sous la courbe vaut toujours 1!).

Propriété | Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$. Alors :

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \simeq 0,683$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \simeq 0,954$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \simeq 0,997$$

Démonstration : On se ramène à la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$.

Remarque Par symétrie de la courbe de la densité, on a : $P(X \leq \mu) = \frac{1}{2}$.

Méthode (Calculer une probabilité avec la calculatrice)

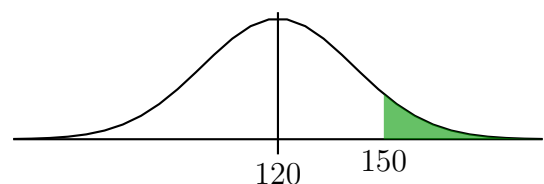
Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(120; 10^2)$. On veut déterminer $\mathbb{P}(X > 150)$.
Il faut se ramener à une probabilité de la forme $P(a \leq X \leq b)$.

Ici, on a : $P(X > 150) = \frac{1}{2} - P(120 \leq X \leq 150)$.

La calculatrice donne $P(120 \leq X \leq 150)$

(voir page 332). On obtient :

$P(X > 150) \simeq 0,5 - 0,49865 \simeq 0,00135$. Ce qui est très faible (c'est normal : on dépasse $\mu + 3\sigma$!).



► **Exercices** : 87,89,90,92p340

► **Exercices** : 34p335 (chercher k), 36p335 (retour à $\mathcal{N}(0; 1)$), 100p342

► **Exercice** : (en DM?) 95p341

VI. Espérance

Rappel L'espérance d'une variable aléatoire X prenant un nombre fini de valeurs est donnée par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \times P(X = x_i)$$

Soit la somme des produits des valeurs prises par leur probabilité d'être obtenues.

Définition De manière similaire, pour une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans un intervalle $[a; b]$, et de densité f , son espérance est définie par :

$$E(X) = \int_a^b t \times f(t) dt$$

Propriété (Loi normale) Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$. Alors $E(X) = \mu$ (l'écart-type est égal à σ).

Démonstration : Admis

► Exercices : 86,91p340

Propriété (Loi uniforme) Si X suit la loi uniforme sur $[a; b]$, alors

$$E(X) = \frac{a + b}{2}$$

Autrement dit, si l'on choisit un grand nombre de valeurs données aléatoirement et uniformément dans un intervalle $[a; b]$, alors la moyenne de ces valeurs sera proche de la valeur centrale de l'intervalle $[a; b]$.

► Exercice : 52p337

Propriété (loi exponentielle) L'espérance mathématique d'une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ est définie par :

$$E(T) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x f(x) dx = \frac{1}{\lambda}$$

Démonstration (exigible) : On cherche une primitive G de $g : x \mapsto x f(x)$. On a $g(x) = \lambda x e^{-\lambda x}$. On cherche alors G de la forme $(ax + b)e^{-\lambda x}$, avec a et b réels à déterminer.

G est de la forme uv avec $u(x) = ax + b$ et $v(x) = e^{-\lambda x}$.

On a alors $u'(x) = a$ et $v'(x) = -\lambda e^{-\lambda x}$ (forme e^w de dérivée $w'e^w$).

Par suite, $G' = (uv)' = u'v + uv'$, donc $G'(x) = a e^{-\lambda x} - \lambda(ax + b)e^{-\lambda x} = (-\lambda ax + (a - \lambda b))e^{-\lambda x}$.

Or $G' = g$, donc par identification, $-\lambda a = \lambda$ et $a - \lambda b = 0$.

Autrement dit, $a = -1$, puis $b = -\frac{1}{\lambda}$. Ainsi, $G(x) = \left(-x - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda x}$. Par suite,

$$\int_0^b x f(x) dx = G(b) - G(0) = \left(-b - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda b} - \left(-0 - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda 0} = \left(-b - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda b} + \frac{1}{\lambda}$$

Or $\lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-b - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda b} = 0$. En effet,

$$\left(-b - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda b} = -b e^{-\lambda b} - \frac{e^{-\lambda b}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} (-\lambda b e^{-\lambda b} - e^{-\lambda b})$$

Comme $\lim_{b \rightarrow +\infty} -\lambda b = -\infty$, $\lim_{X \rightarrow -\infty} X e^X = 0$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$ on obtient bien la limite annoncée.

Finalement, $E(T) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x f(x) dx = \frac{1}{\lambda}$.

► **Exercices** : 15p334, 63,66,67p338

★ **Approfondissement** : 93p340, 97p341, 101p342