

Chapitre :

Logarithme



⊗ **Activité** : 1p134 (fonction réciproque de la fonction exponentielle)

I. Définition

La fonction exponentielle étant strictement croissante à valeurs strictement positives, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, quelque soit $x > 0$, il existe un unique réel y tel que $e^y = x$. Par conséquent, on peut définir :

Définition La fonction **logarithme népérien**, notée \ln , est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ qui à tout réel $x > 0$ associe l'unique réel $\ln(x)$ dont l'exponentielle vaut x .

Autrement dit :

- Pour tout $x > 0$ et y réel, $x = e^y$ équivaut à $\ln(x) = y$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$.
- Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $e^{\ln(x)} = x$.

On dit que l'exponentielle et le logarithme sont les fonctions inverses l'une de l'autre.

Exemple À retenir :

- $\ln(1) = 0$ car $1 = e^0$, donc $\ln(1) = \ln(e^0) = 0$
- $\ln(e) = 1$ car $e = e^1$, donc $\ln(e) = \ln(e^1) = 1$
- Pour tout λ réel, l'équation $\ln(x) = \lambda$ a pour unique solution $x = e^\lambda$
- Pour tout a réel strictement positif, l'équation $e^x = a$ a pour unique solution $x = \ln a$.

► **Exercices** : 4,5p144 (ensembles de définition)

II. Dérivée et variations

Propriété | La fonction \ln est dérivable sur $]0; +\infty[$ et quelque soit $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Démonstration :

Si on admet que la fonction \ln est dérivable, on utilise la fonction $x \mapsto e^{\ln x}$ définie sur $]0; +\infty[$. Elle est de la forme e^u avec $u(x) = \ln(x)$. Sa dérivée est donc $u' e^u$, dont l'expression est $\ln'(x) e^{\ln x}$. Or $e^{\ln x} = x$, donc la dérivée de la fonction est $x \mapsto 1$ et : $\ln'(x) \times x = 1$.

Comme $x \neq 0$, on a bien $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

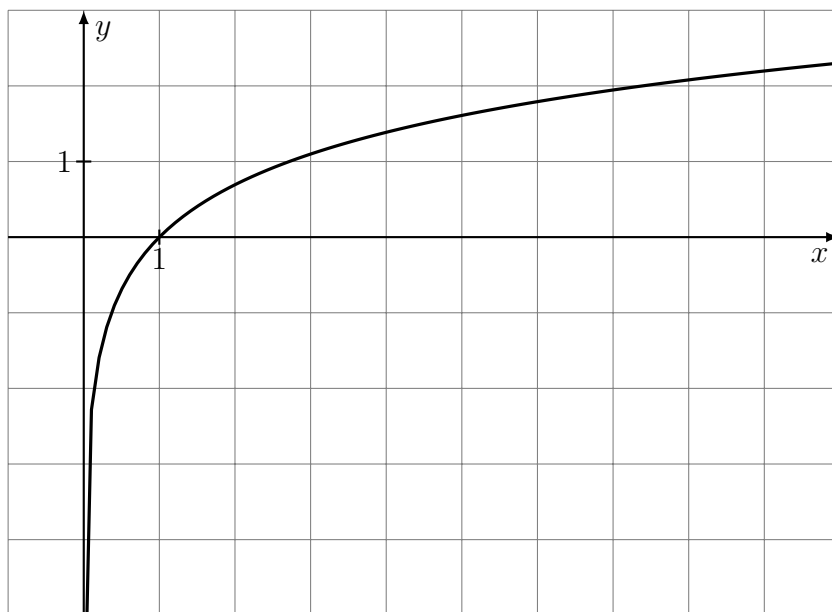
Corollaire | La fonction \ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. De plus :

- $0 < x < 1$ équivaut à $\ln(x) < 0$;
- $x > 1$ équivaut à $\ln(x) > 0$;
- Soit a et b strictement positifs. Alors :

$$a = b \text{ équivaut à } \ln(a) = \ln(b) \quad \text{et} \quad a > b \text{ équivaut à } \ln(a) > \ln(b)$$

Démonstration : Puisque $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$ pour tout $x > 0$, la fonction \ln est effectivement strictement croissante. On sait par suite que $\ln(1) = 0$; les propriétés suivantes proviennent directement de la stricte croissance de \ln .

La courbe de la fonction logarithme est la suivante :



- ▶ Exercices : 6,8,9p144 (équations)
- ▶ Exercices : 1,12p144 (inégalités), 14p144 (inéquations) +(15)
- ▶ Exercices : 40,44p146 ((in)équations) +(39,46)
- ▶ Exercices : 55,56p147 (variations)
- ▶ Exercices : (en AP) 50p146 (suite), 58p147 (logique), 59p147 (tangente), 62p147 (paramètres)

III. Relation fonctionnelle

⊗ **Activité :** 3p135

Théorème | (**Relation fonctionnelle du logarithme**)

Pour tous a et b réels strictement positifs,

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

On dit parfois que le logarithme transforme le produit en somme. (Rappel : l'exponentielle transforme la somme en produit).

Démonstration : Équivalences en passant par l'exponentielle.

Propriété | Pour tout $b > 0$,

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$$

Démonstration : Similaire à la précédente.

Les deux précédentes propriétés permettent d'établir les résultats suivants :

Corollaire |

- Soit a et b strictements positifs. Alors :

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

- Soit $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\ln(a^n) = n \ln(a)$$

le nombre n peut également être un entier relatif pour la dernière égalité.

- Pour tout $a > 0$,

$$\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$$

Démonstration : On ne démontre que la dernière.

Pour tout $a > 0$, $\sqrt{a^2} = a$. Donc $\ln(\sqrt{a^2}) = \ln(a)$. Or d'après la relation fonctionnelle,

$\ln(\sqrt{a^2}) = \ln(\sqrt{a}\sqrt{a}) = \ln(\sqrt{a}) + \ln(\sqrt{a}) = 2 \ln(\sqrt{a})$. On peut alors conclure que $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$.

Les autres sont laissées en exercice.

Ces relations permettent bien entendu de réécrire des expressions utilisant le logarithme.

► **Exercices** : 20,21,22,25,27p145

► **Exercices** : 66p147, (68p148)

► **Exercices** : 69,70p148 (équations avec relation à utiliser)

► **Exercices** : 71,76p148 (détermination de d'exposants/rangs)

IV. Limites

Propriété |

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$$

Démonstration : Soit A un réel. Comme \ln est strictement croissante, pour tout $x > e^A$, $\ln(x) > \ln(e^A) = A$, d'où la première limite.

On fait un changement de variable pour l'autre limite : $X = \frac{1}{x}$. On a $\ln(x) = -\ln(X)$.

D'autres limites sont à connaître :

Propriété |

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$$

Démonstration : Il s'agit *a priori* de limites indéterminées. Cependant :

- dans le premier cas, il s'agit d'un nombre dérivé : celui de la fonction \ln en 1.

En effet, $\frac{\ln(1+h)}{h} = \frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h}$, et comme \ln est dérivable en 1, la limite de cette expression lorsque h tend vers 0 est par définition $\ln'(1)$, soit $\frac{1}{1} = 1$.

- Dans le second cas, on passe par un changement de variable en utilisant l'exponentielle.

En posant $X = \ln x$ on a $x = e^X$ et :

$$\frac{\ln x}{x} = \frac{X}{e^X} = \frac{1}{\frac{e^X}{X}}$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} X = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ (chapitre sur l'exponentielle).

Par conséquent, par composition on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

- On pose $X = \frac{1}{x}$, alors $x = \frac{1}{X}$ et :

$$x \ln x = \frac{1}{X} \ln \frac{1}{X} = -\frac{\ln X}{X}$$

Or $\lim_{x \rightarrow 0} X = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$.

► Exercices : 28,29,30,31,33p145

► Exercices : 81,82,85,86,87,88p149

► Exercice : 84p149 (suite et algorithme)

V. Fonctions $\ln u$

Propriété | Soit u une fonction dérivable et **strictement positive** sur un intervalle I . Alors la fonction $x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I , et a pour dérivée

$$x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Démonstration : Admis

Exemple Soit $f : x \mapsto \ln(x^2 + 1)$. La fonction f est définie sur \mathbb{R} et est de la forme $\ln u$ avec $u(x) = x^2 + 1$. La fonction u est dérivable sur \mathbb{R} et $u'(x) = 2x$. Par conséquence f est dérivable sur \mathbb{R} et $f' = \frac{u'}{u}$, donc

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

► Exercices : 35,36,38p145

► Exercices : 91,92p149

VI. Logarithme décimal

Le logarithme utilisé en cours de physique au lycée n'est pas la fonction \ln , mais la fonction \log .

Définition Pour tout $x > 0$, on pose $\log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$

Une conséquence de cette définition est que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\log(10^n) = n$.

En effet, $\log(10^n) = \frac{\ln(10^n)}{\ln(10)} = \frac{n \times \ln(10)}{\ln(10)} = n$.

En particulier, $\log(10) = 1$.

Pour le reste, la fonction \log admet la même relation fonctionnelle et a les mêmes variations que \ln .

★ **Approfondissement** : 126,127,128p159