Chapitre :
Trigonométrie

1. Définitions

Définition

- La fonction **sinus** est la fonction qui, à tout réel x, associe $\sin(x)$.
- La fonction **cosinus** est la fonction qui, à tout réel x, associe $\cos(x)$.

Propriété Les fonctions sinus et cosinus sont **continues** et **dérivables** sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$\sin'(x) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \cos'(x) = -\sin(x)$$

Par suite,

⋆ si $f(x) = \sin(ax+b)$, alors f est dérivable et $f'(x) = a\cos(ax+b)$

⋆ si $f(x) = \cos(ax+b)$, alors f est dérivable et $f'(x) = -a\sin(ax+b)$

Propriété **(Périodicité)** Les fonctions sinus et cosinus sont **périodiques** de période 2π, ce qui signifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(x+2\pi) = \sin(x) \quad \text{et} \quad \cos(x+2\pi) = \cos(x)$$

Propriété **(Parité)**

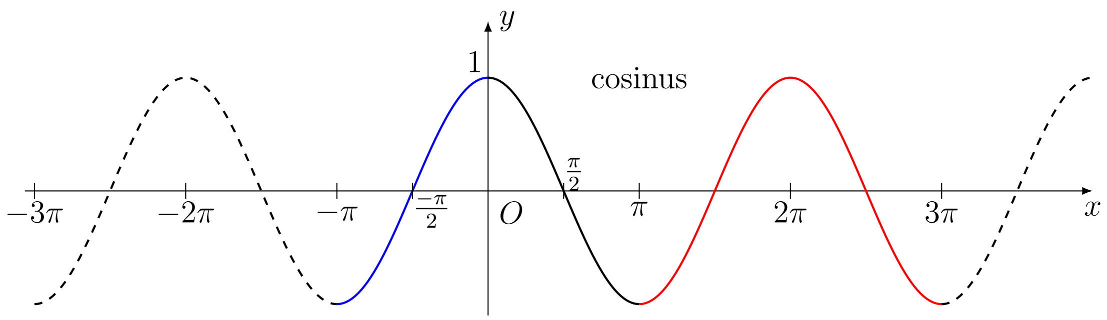
- La fonction sinus est **impaire**, ce qui signifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(-x) = -\sin(x)$;
- La fonction cosinus est **paire**, ce qui signifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos(x)$;

2. variations

Pour tracer la courbe représentative de la fonction cosinus, on peut déjà dresser son tableau de variations sur $[0;\pi]$:

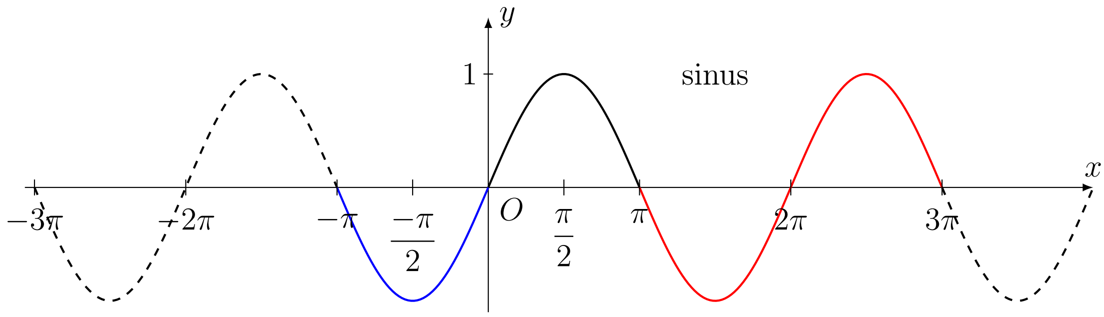
x	0		π
$\cos'(x) = -\sin(x)$	0	$-$	0
variations de cos	1	$\searrow$	-1

Ensuite, grâce à la parité de la fonction cosinus on peut compléter sur $[-\pi;0]$; finalement on reporte sur les autres intervalles grâce à la périodicité.



La partie noire pleine est la représentation sur $[0;\pi]$, la partie bleue est obtenue grâce à la parité (fonction paire donc symétrie par rapport à l'axe des ordonnées) et la partie rouge est obtenue grâce à la périodicité (translation de vecteur $2\pi\overrightarrow{i}$).

Pour la fonction sinus, la courbe est la suivante (obtenue par le même moyen, voir page 80) :



la partie noire pleine est la représentation sur $[0;\pi]$, la partie bleue est obtenue grâce à la parité (fonction impaire donc symétrie par rapport à l'origine) et la partie rouge est obtenue grâce à la périodicité (translation de vecteur $2\pi\overrightarrow{i}$).

► **Exercices :** 17,24-27p84 (dérivation) , 68,69,70,72p87 (dérivation) , 29p84, 78p87 (parité)

3. Une limite particulière

⊛ **Activité :** 3p77 (hors salle info, utiliser les calculatrices pour obtenir des tableaux de valeurs)

Propriété On admet la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

Une manière de voir cette limite est qu'elle est égale au nombre dérivé de la fonction sinus en 0, donc $\sin'(0)=\cos(0)=1$.

► **Exercices :** 31,32p85 , 88,90p88

4. Inéquations trigonométriques

⊛ **Activité :** 4p77 (deux méthodes de résolution : avec la courbe ou avec le cercle)

► **Exercices :** 93,94p88 , 99,100p89 ; 107,108,109,110p89 (étude de fonctions)

5. Notation exponentielle

Nous que pour tout réel θ, $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$. Ainsi :

Propriété Pour tout réel θ : $e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$. Par suite :

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\quad\text{et}\quad\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

La notation exponentielle et les formules qui lui sont applicables permettent de démontrer les formules suivantes :

$$\cos(\theta+\theta')=\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta'\quad\text{et}\quad\sin(\theta+\theta')=\sin\theta\cos\theta'+\cos\theta\sin\theta'$$
$$\cos(\theta-\theta')=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\quad\text{et}\quad\sin(\theta-\theta')=\sin\theta\cos\theta'-\cos\theta\sin\theta'$$

Qui impliquent :

$$\cos(2\theta)=\cos^2\theta-\sin^2\theta\quad\text{et}\quad\sin(2\theta)=2\sin\theta\cos\theta$$