

Devoir maison n°03 – mathématiques
Donné le 19/09/2017 – à rendre le 26/09/2017

Exercice 1

1. Les racines de f sont par définition les nombres réels x tels que $f(x) = 0$. Elles correspondent graphiquement aux coordonnées des points d'intersection entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses. Autrement dit le nombre de racine est égal au nombre d'intersection.
Donc si la fonction n'a pas de racine, la parabole ne coupe pas l'axe des abscisses.

La propriété réciproque est :

Si la parabole qui représente une fonction polynomiale du second degré ne coupe pas l'axe des abscisses, alors elle n'a pas de racine.

Elle est vraie aussi pour la même raison.

2. La propriété est fausse. Pour cela il suffit de donner un contre-exemple.

Considérons $f(x) = -x^2 + 1$ on a $c = 1 > 0$, pourtant $f(2) = -2^2 + 1 = -4 + 1 = -3 < 0$, ce qui implique que le point $A(2; -3)$, situé sous l'axe des abscisses, appartient à la courbe représentative de f .

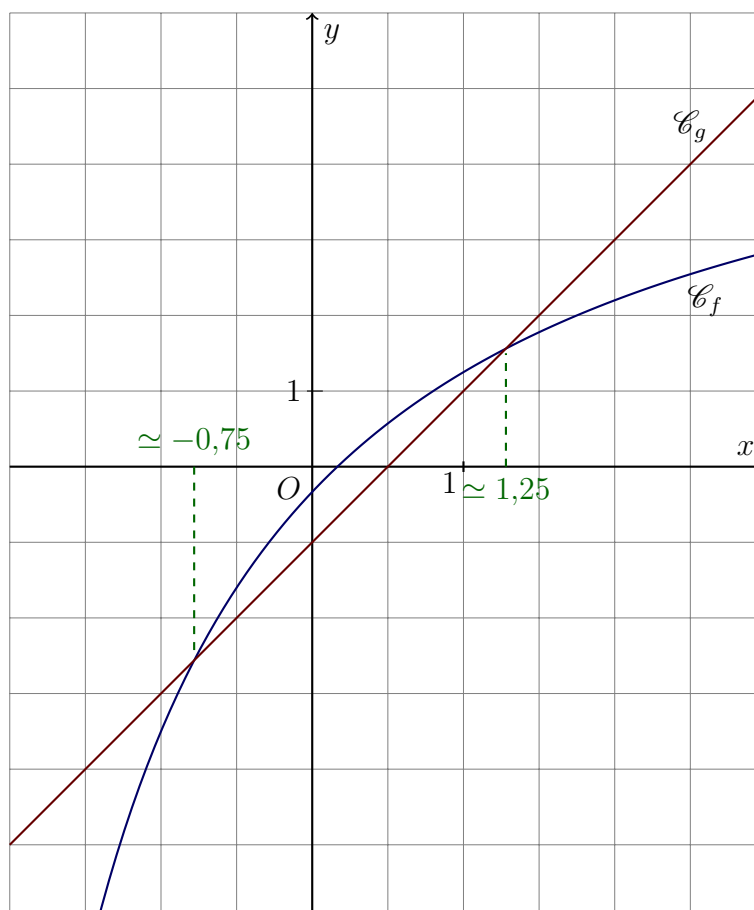
La propriété réciproque est :

Si la parabole représentant la fonction f telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$ est toujours au-dessus de l'axe des abscisses, alors $c > 0$.

Elle est vraie, car si la parabole est au-dessus de l'axe des abscisses, cela implique que toutes les images par f sont positives, en particulier celle de 0. Or $f(0) = a \times 0^2 + b \times 0 + c = c$.
Donc $c > 0$.

Exercice 2

1. Voici la représentation graphique des deux fonctions :



2. Voir les traits de résolution graphique à la question précédente.

L'ensemble des solutions (approximatives) est $\mathcal{S} = \{-0,75; 1,25\}$.

3. On résout :

$$\begin{aligned}\frac{6x-1}{x+3} = 2x-1 &\Leftrightarrow 6x-1 = (2x-1)(x+3) \\ &\Leftrightarrow 6x-1 = 2x^2+6x-x-3 \\ &\Leftrightarrow 6x-1 = 2x^2+5x-3 \\ &\Leftrightarrow 2x^2+5x-3-6x+1=0 \\ &\Leftrightarrow 2x^2-x-2=0\end{aligned}$$

On obtient une équation du second degré.

On calcule : $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 1 + 16 = 17 > 0$

On a alors deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - \sqrt{17}}{2 \times 2} = \frac{1 - \sqrt{17}}{4} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + \sqrt{17}}{4}.$$

$$\text{Ainsi } \mathcal{S} = \left\{ \frac{1 - \sqrt{17}}{4}; \frac{1 + \sqrt{17}}{4} \right\}.$$

On remarque que $x_1 \simeq -0,78$ et $x_2 \simeq 1,28$.