Devoir maison n°04 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. (a) La coube décrite par le projectile est une parabolecar la relation $y = -0{,}1(1+a^2)x^2 + ax$ est de la forme $y = Ax^2 + Bx + C$ avec $A = -0{,}1(1+a^2)$, $B = a$ et $C = 0$.
On remarque que $A < 0$ car $(1+a^2) > 0$ (a^2 étant un carré donc positif). Donc la hauteur y atteint bien un maximum, situé au sommet de la parabole dont les branches sont orientées vers le bas. On sait que l'abscisse du sommet est donnée par la formule :

$$x = \frac{-B}{2A} = \frac{-a}{2 \times (-0{,}1(1+a^2))} = \frac{a}{0{,}2(1+a^2)}$$

Pour obtenir la hauteur maximale on remplace alors x dans la relation :

$$\begin{aligned} y &= -0{,}1(1+a^2) \times \left(\frac{a}{0{,}2(1+a^2)}\right)^2 + a \times \frac{a}{0{,}2(1+a^2)} \\ &= -0{,}1 \times \frac{(1+a^2) \times a^2}{0{,}04 \times (1+a^2)^2} + \frac{a^2}{0{,}2(1+a^2)} \\ &= -\frac{5}{2}\frac{a^2}{1+a^2} + 5\frac{a^2}{1+a^2} && \left(\text{car } \frac{0{,}1}{0{,}04} = \frac{5}{2} \text{ et } \frac{1}{0{,}2} = 5\right) \\ &= \frac{5}{2}\frac{a^2}{1+a^2} \end{aligned}$$

Or $\frac{5}{2} = 2{,}5$ et $1 - \frac{1}{1+a^2} = \frac{1+a^2-1}{1+a^2} = \frac{a^2}{1+a^2}$.
Donc on a bien $y = 2{,}5\left(1 - \frac{1}{1+a^2}\right)$.

(b) On a déjà remarqué que $1 + a^2 > 0$, donc $-\frac{1}{1+a^2} < 0$, puis $1 - \frac{1}{1+a^2} < 1$. Finalement, $2{,}5\left(1 - \frac{1}{1+a^2}\right) < 2{,}5$. On en déduit que la flèche est inférieure à 2,5 m, donc la flèche ne dépasse pas 2,5 m.

2. (a) On recherche la portée, il faut donc résoudre l'équation :

$$\begin{aligned} -0{,}1(1+a^2)x^2 + ax = 0 &\Leftrightarrow x(a - 0{,}1(1+a^2)x) = 0 && \text{(factorisation par } x) \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } a - 0{,}1(1+a^2)x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{a}{0{,}1(1+a^2)} \end{aligned}$$

La solution $x = 0$ correspond à la position de départ. L'autre solution donne alors la distance hozitontale parcourue avant que le projectile ne retombe. La distance cherchée est donc $\frac{a}{0{,}1(1+a^2)}$.

(b) On doit vérifier si $\frac{a}{0{,}1(1+a^2)} \leqslant 5$ est toujours vraie. Cherchons à trouver une inéquation équivalente (pour chercher à étudier un signe) :

$$\begin{aligned} \frac{a}{0{,}1(1+a^2)} \leqslant 5 &\Leftrightarrow a \leqslant 5(0{,}1(1+a^2)) && (\text{on a } (0{,}1(1+a^2) > 0) \\ &\Leftrightarrow a \leqslant 0{,}5 + 0{,}5a^2 \\ &\Leftrightarrow 0 \leqslant 0{,}5a^2 - a + 0{,}5 \end{aligned}$$

Ainsi il suffit de démontrer que l'expression (polynomiale de degré 2 en a) $0{,}5a^2 - a + 0{,}5$ est toujours positive.

On calcule son discriminant : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 1 - 1 = 0$. Il ya une seule racine, et on sait alors que le signe de l'expression est celui du coefficient de x^2. Ici le coefficient est $0{,}5 > 0$, donc $0{,}5a^2 - a + 0{,}5$ est bien toujours positive.

Remarque : on peut voir plus rapidement que :

$$0{,}5a^2 - a + 0{,}5 = 0{,}5(a^2 - 2a + 1) = 0{,}5(a - 1)^2 \geqslant 0$$