Devoir maison n°05 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. On résout, pour $x=0$, l'équation d'inconnue y :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{4}x+y+1=0 &\Leftrightarrow y+1=0\\ &\Leftrightarrow y=-1\end{aligned}$$

Alors le point $M(0;-1)$ appartient à d.
Ainsi, Il existe un point de d d'abscisse nulle : la proposition est **vraie**.

2. On peut vérifier que le point $M\left(1;-\frac{3}{4}\right)$ appartient à d.
En effet : $-\frac{1}{4}\times 1+\left(-\frac{3}{4}\right)+1=-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}+1=-\frac{4}{4}+1=-1+1=0.$
Or 1 et $-\frac{3}{4}$ ne sont pas de même signe.
Ainsi il existe un point $M(x;y)$ de d avec x et y de signe contraire : la proposition est **fausse**.

3. On résout, en notant $x=y=u$ l'équation d'inconnue u :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{4}x+y+1=0 &\Leftrightarrow -\frac{1}{4}u+u+1=0\\ &\Leftrightarrow \frac{3}{4}u=-1\\ &\Leftrightarrow u=-\frac{4}{3}\end{aligned}$$

L'équation ayant une solution, on en déduit que le point $M\left(-\frac{4}{3};-\frac{4}{3}\right)$ appartient à d.
Ainsi Il existe un point $M(u;v)$ de d tel que $u=v$: la proposition est **vraie**.

4. L'équation de d équivaut à $\frac{1}{4}x=y+1$, soit à $x=4y+4$
Or $4>0$, donc $x=4y+4>4y$.
Ainsi, pour tout point $M(x;y)$ de d, $x>4y$: la proposition est **vraie**.

Exercice 2
$\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont colinéaires si et seulement si $M\in(AB)$.
De même, $\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{MD}$ sont colinéaires si et seulement si $M\in(CD)$.
Ainsi, un point M satisfait la propriété donnée dans l'énoncé si et seulement si M appartient aux deux droites.
Cela n'est possible que si (AB) et (CD) ont un point commun.
Pour démontrer qu'il existe un unique tel point M, il suffit de démontrer que (AB) et (CD) sont sécantes c'est à dire qu'elles ont un unique point commun.
Pour cela, on peut utiliser la méthode vue en seconde : on calcule les coefficients directeurs des droites :

$$a_{(AB)}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-2-2}{-1-3}=\frac{-4}{-4}=1$$

$$a_{(CD)} = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{0-2}{3-(-1)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \neq 1$$

Les deux coefficients directeurs étant distincts, on en déduit que les droites (AB) et (CD) sont sécantes.
Ainsi il existe bien un unique point M tel que les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ d'une part, $\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{MD}$ d'autre part, soient colinéaires.
Il s'agit du point d'intersection entre les droites (AB) et (CD).